Peter Elbau
Christian Gerhards

Übungen zu „Analysis“
Bachelor Mathematik

Universität Wien
13. bis 17. März 2017

Übungsblatt 1

Beispiel 1.
Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} |x|^a \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

(a) stetig,

(b) differenzierbar,

(c) stetig differenzierbar?

Beispiel 2.
Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2 \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbb{R},$$

so ist f konstant.

Beispiel 3.
Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, daß

$$1 + x < e^x < \frac{1}{1 - x}$$

für $0 < x < 1$ gilt.

Beispiel 4.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

(a) Zeigen Sie, daß $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv ist, falls

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{f(x)}{|x|} = \infty$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, daß $f'(I)$ für jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ebenfalls ein Intervall ist.

Beispiel 5.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Beweisen Sie die Formel

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}.$$

Beispiel 6.
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine strikt konvexe Funktion. Zeigen Sie, daß es höchstens einen Punkt $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit

$$f(\xi) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

geben kann.

Beispiel 7.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{|x|} = \infty.$$

Wir definieren $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(xy - f(x)).$$

(a) Zeigen Sie, daß f^* konvex ist.

(b) Sei f zweimal stetig differenzierbar und $f'' > 0$. Zeigen Sie, daß dann f^* stetig differenzierbar und $(f^*)'$ die Umkehrfunktion von f' ist.

Beispiel 8.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar. Wir definieren die Schwarz-Ableitung $S[f]$ von f durch

$$S[f] : \{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}, \quad S[f] = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

(a) Zeigen Sie, daß die Schwarz-Ableitung für beliebige Funktionen $f, g \in C^3(\mathbb{R})$ auf der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid (f \circ g)'(x) \neq 0\}$ die Kettenregel

$$S[f \circ g] = (S[f] \circ g)(g')^2 + S[g]$$

erfüllt.

(b) Sei $f \in C^3(\mathbb{R})$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit

$$f'(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad S[f](x) < 0 \quad \text{für alle} \quad x \in I.$$

Beweisen Sie, daß dann jeder kritische Punkt der Funktion $|f'|$ in I ein lokales Maximum ist.

—