Übungsblatt 2

Beispiel 1.
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beide n-mal differenzierbar. Beweisen Sie die Leibniz-Regel

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

für die n-te Ableitung des Produkts.

Beispiel 2.
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x\sin(x)}$,

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

(c) $\lim_{x\downarrow 0} (1 + \tan^2(\sqrt{x}))^{\frac{1}{2x}}$,

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(\frac{1}{x})}{\sin(x)}$.

Beispiel 3.
Seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \sin(x)\cos(x) \quad \text{und}$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x)e^{\sin(x)}$$

gegeben.

Zeigen Sie, daß

(a) der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{f'}{g'}(x) = 0$ ist,

(b) der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g}(x)$ jedoch nicht existiert.

Wie verträgt sich das mit dem Satz von de L'Hospital?

Beispiel 4.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, daß die inverse Funktion $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ebenfalls zweimal differenzierbar ist, und leiten Sie eine Formel für $(f^{-1})''$ her, in der nur Ableitungen von f berechnet werden müssen.

(b) Sei $g : (1, \infty) \to (0, \infty)$ so definiert, daß g die Gleichung

$$x + g(x) = e^{g(x)}, \quad x \in (1, \infty),$$

erfüllt. Bestimmen Sie die zweite Ableitung $g''(e - 1)$ von g an der Stelle $e - 1$.

Hinweis: Es gilt die Beziehung $g(e - 1) = 1$.

Beispiel 5.
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt γ-Hölder-stetig, $\gamma \in (0,1)$, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so daß

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\gamma \quad \text{für alle} \quad x, y \in I$$

gilt.

Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ an, die

(a) stetig und beschränkt, aber nicht gleichmäßig stetig ist,

(b) gleichmäßig stetig, aber für keinen Wert $\gamma \in (0,1)$ γ-Hölder-stetig ist,

(c) γ-Hölder-stetig für jede Konstante $\gamma \in (0,1)$, aber nicht Lipschitz-stetig ist,

(d) Lipschitz-stetig, aber in unendlich vielen Punkten nicht differenzierbar ist.

Beispiel 6.
Wir definieren die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß

(a) die Funktion f beschränkt ist,

(b) die Einschränkung von f auf jede beliebige Gerade in $\mathbb{R}^2$ stetig ist (das heißt, jede Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(at+b, ct+d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ist stetig),

(c) die Funktion f im Punkt $(0,0)$ jedoch unstetig ist.

(d) Ist die Funktion f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gleichmäßig stetig?

Beispiel 7.
Zeigen Sie anhand der Definition der Fréchet-Ableitung, daß die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{|x|^2}$$

in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ durch die Abbildung

$$Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad Df(x)v = 2\mathrm{e}^{|x|^2} \langle x, v \rangle, \quad v \in \mathbb{R}^n,$$

gegeben ist.

——