Einführung in die Analysis, WS 16/17,
Übungsblatt, Woche ab 7.11.

1. Man zeige:
   a) Alle Nullstellen rationaler Polynome sind auch Nullstellen ganzzahliger Polynome.
   b) Sei $p/q \in \mathbb{Q}$ (gekürzt) eine Nullstelle des ganzzahligen Polynoms $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, dann gilt $q|a_n$ und $p|a_0$.

2. Man zeige für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\text{a)} \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \qquad b \neq 0, \qquad \text{b)} \quad \Big||a| - |b|\Big| \leq |a - b|.$$

3. Man zeige für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \max\{a,b\} = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}, \\ \text{b)} & \min\{a,b\} = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}, \\ \text{c)} & \max\{a,b\} - \min\{a,b\} = |a-b|. \end{array}$$

4. Man schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1+i}{7-i}, \qquad \left|\frac{2-6i}{3+8i}\right|, \qquad (9+6i)^4, \qquad i^{101}.$$

5. Man berechne die komplexen Lösungen z von
   a) $z^2 + (1-2i)z = 3 + i$,
   b) $z^2 - 4z = 2i - 4$.

6. $2i$ ist eine Lösung der Gleichung

$$z^4 + 5z^3 + 11z^2 + 20z + 28 = 0.$$

   Man berechne die restlichen Lösungen.

7. Man zeige für $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\cos(3\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.$$