Übungsblatt 8

Beispiel 1.
Zeigen Sie, daß eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen einen Punkt a konvergiert, wenn jede Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit dem Grenzwert a besitzt.

Beispiel 2.
Geben sie eine Folge an, die alle reellen Zahlen als Häufungspunkt hat.

Beispiel 3 (Satz von Stolz).
Beweisen Sie den Satz von Stolz:

Die reelle Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei streng monoton wachsend und unbeschränkt. Weiters sei die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \rho \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \rho \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 4.
(a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{1 + 2^{1/2} + 3^{1/3} + \ldots + n^{1/n}}{n} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}.$$

Beispiel 5 (Verallgemeinerung von Beispiel 6 des siebten Übungsblatts).
Seien $p_1, p_2, \ldots, p_n$ alle positiv und strebt $1/(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) \to 0$, so folgt aus $a_n \to a$ auch

$$\frac{p_1 a_1 + \ldots + p_n a_n}{p_1 + \ldots + p_n} \to a.$$

Beispiel 6.
Zeigen Sie, dass

$$\frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0}{n+1} \to ab\,,$$

falls $a_n \to a$ und $b_n \to b$.

Hinweis: Schreiben Sie: $a_k b_{n-k} = (a_k - a) b_{n-k} + a b_{n-k}$.

Beispiel 7.
Zeigen Sie $\binom{2n}{n}^{1/n} \to 4$.

Beispiel 8.
Zeigen Sie, dass für zwei beschränkte, nicht negative Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n) \limsup_{n\to\infty}(b_n);$$

und falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \limsup_{n\to\infty}(b_n).$$

Geben Sie ein Beispiel an, wo die erste Ungleichung keine Identität wird.

—