

Übungsblatt 9

Beispiel 1.

Zeigen Sie, dass jede monoton wachsende (fallende) Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die nicht konvergiert, bestimmt gegen $+\infty$ ($-\infty$) divergiert.

Beispiel 2.

Sei $\forall n \in \mathbb{N} a_n(x) = nx - [nx]$. Beweisen Sie: Ist x rational, so hat diese Folge nur endlich viele Häufungswerte. Ist x irrational, so ist jede Zahl $0 \leq a \leq 1$ Häufungswert.

Beispiel 3.

Berechnen Sie

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

Beispiel 4.

Der Wert des Kettenbruches

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$$

ist definiert als der Limes der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$,

$$a_0 = 1 \text{ und } a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}.$$

Beweisen Sie:

(a) $a_{n-1} = \frac{f_{n+1}}{f_n}$, wobei f_n die Fibonacci-Zahlen sind:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2},$$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Beispiel 5.

Sei

$$a_n := \sqrt{n + 1000} - \sqrt{n},$$

$$b_n := \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n},$$

$$c_n := \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $n < 10^6$ gilt:

$$c_n < b_n < a_n.$$

Zeigen Sie aber auch, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1/2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty.$$

Letzteres im Sinn einer bestimmten Divergenz.

Beispiel 6.

Berechnen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n + \sqrt[3]{n^2}} - \sqrt[3]{n}).$$

Beispiel 7.

Zeigen Sie, daß für alle $p \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} \leq \sum_{k=1}^n k^p$$

gilt.

Beispiel 8.

Die Werte $S_{n,k}$, $k, n \in \mathbb{N}_0$, sollen die Rekursionsgleichung

$$S_{n+1,k} = S_{n,k-1} + kS_{n,k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

mit den Randwerten $S_{0,0} = 1$, $S_{0,k} = 0$ für $k \in \mathbb{N}$ und $S_{n,0} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweisen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die explizite Formel

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$