Übungsblatt 11

Beispiel 1.
Zeigen Sie die Abelsche Identität:

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = \sigma_1(b_1 - b_2) + \sigma_2(b_2 - b_3) + \ldots + \sigma_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + \sigma_n b_n \, ,$$

wobei

$$\sigma_m = a_1 + \ldots + a_m \, .$$

Beispiel 2.
Sei $m > 0$. Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots .$$

Beispiel 3.
Zeigen Sie mit Hilfe der Abelschen Identität: Seien $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$ mit $\lim a_n = 0$, dann konvergieren die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

gleichmäßig in jedem abgeschlossen Intervall I, dass die Werte $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ nicht enthält.

Gleichmäßig bedeutet, dass

$$|s_n(x) - s(x)| \leq \rho_n \quad \forall_{x \in I} \text{ und } \rho_n \to 0.$$

Beispiel 4.
Die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = f_1 + f_2 x + f_3 x^2 + \ldots$$

darf vorausgesetzt werden. Zeigen Sie, dass $f_1, f_2, \ldots$ die Fibonaccischen Zahlen sind (siehe Beispiel 4 von Übungsblatt 9).

Beispiel 5.
Die ζ-Funktion ist definiert für die komplexen Zahlen $s = \sigma + \mathrm{i}t$ mit $\sigma > 1$ und $t \in \mathbb{R}$ durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Zeigen Sie, dass für $s \in \mathbb{R}$ die Reihe für $s > 1$ konvergiert und für $s \leq 1$ divergiert.

Beispiel 6.
Berechnen Sie in $\mathbb{C}$ die Häufungspunkte der Folge

$$\left(\left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) \mathrm{i} \right]^n \right) \, .$$

Beispiel 7.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, und es bezeichne $H_{(a_n)}$ die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweisen Sie, daß

$$\sup(H_{(a_n)}) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$

gilt.

Beispiel 8.

Sei $a_{jk} > 0$ für alle $j, k \in \mathbb{N}_0$. Es gelte

$$\forall_{j\in\mathbb{N}_0} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} \text{ konvergiert und } \forall_{k\in\mathbb{N}_0} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk} \text{ konvergiert .}$$

Darüberhinaus gelte

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}\right) = B < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}\right) = C < \infty \ .$$

Dann gilt

$$B = C.$$

——