Übungsblatt 12

Beispiel 1.
Sei

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\,, \\ x &\to \begin{cases} \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\,, \\ x &\to \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Wo sind f_1, f_2 stetig?

Bemerkung: Aus der Schule bekannte Eigenschaften der Sinusfunktion dürfen verwendet werden.

Beispiel 2.
Sei

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R}\,, \\ x &\mapsto \sqrt{x}\,. \end{aligned}$$

(a) Ist f stetig?

(b) Ist f Lipschitz-stetig? Wenn ja, geben Sie die Lipschitzkonstante an.

Beispiel 3.

(a) Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N} e^n > \frac{n^n}{n!}$.

(b) Für welche $x \geq 0$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n!}{n^n}$.

Beispiel 4.
Sei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler von n. Zum Beispiel wird 4 von $1, 2, 4$ geteilt, also ist $\tau(4) = 3$. Sei $x > 0$. Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n$ mit dem Wurzelkriterium.

Ist auch das Quotientenkriterium für alle $x < 1$ anwendbar?

Hinweis: Betrachten Sie den Spezialfall $x = 3/4$ und den Quotienten aus $(p+1)$-tem und p-tem Koeffizienten, falls p eine Primzahl ist.

Beispiel 5.
Verwenden Sie die Reihendarstellung

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}\,, \quad \forall (-1 < x \leq 1).$$

Finden Sie einen Näherungwert für $\ln(1/2) = -\ln 2$, der sich vom exakten Wert um weniger als 0.1 unterscheidet.

Beispiel 6.
Verwenden Sie die Identität

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\dfrac{\pi}{2}, & m \text{ gerade,} \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & m \text{ ungerade,} \end{cases}$$

wobei die Doppelfakultät durch

$$m!! = \begin{cases} m(m-2)\cdots 2, & m \text{ gerade,} \\ m(m-2)\cdots 1, & m \text{ ungerade,} \end{cases}$$

definiert ist, um zu zeigen, dass die Wallissche Formel gilt:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n-1} \ .$$

Hinweis: Es gilt die Ungleichung

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+2}(x)\,dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)\,dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)\,dx \ .$$

Beispiel 7.
Eine Funktion $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls

$$f(tx + (1-t)y) \le t f(x) + (1-t) f(y)\,, \quad \forall t \in [0,1] \forall x, y \in]a,b[\ .$$

Zeigen Sie, dass eine konvexe Funktion stetig ist.

Beispiel 8.
Eine Funktion $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ heißt oberhalb-stetig wenn für jeden Punkt $x \in]a,b[$ und jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert, gilt

$$f(x) \ge \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \ .$$

Sei

$$\hat{f}(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{|y-x|<\frac{1}{n}} f(y) \ .$$

Zeigen Sie: f ist genau dann oberhalb-stetig, wenn $f = \hat{f}$ in $]a,b[$ gilt.

—