Übungsblatt 13

Beispiel 1.
Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $f :]0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

(b) Zeigen Sie mit dem Zwischenwertsatz den Spezialfall des Hauptsatzes der Algebra: Jedes Polynom von ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Beispiel 2.
Sei $\exp(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cdot^k}{k!} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wie in der Vorlesung. Zeigen Sie:

(a) $\lim_{z\to 0} \frac{\exp(z)-1}{z} = 1$

(b) Verwenden Sie $\exp(z) = \exp(z_0 + z - z_0)$ um zu zeigen, dass $\exp(z)$ stetig ist.

Beispiel 3.
Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq 2^X$. $\mathcal{T}$ heißt Topologie auf X, falls

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $\forall_{n\in\mathbb{N}} \left(A_1,\dots,A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) \in \mathcal{T}\right)$
- Sei I eine beliebige Indexmenge (nicht notwendigerweise endlich oder abzählbar) $(\forall_{j\in I} A_i \in \mathcal{T}) \Rightarrow \left(\bigcup_{j\in I} A_j\right) \in \mathcal{T}$

Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, so heißt $(X,\mathcal{T})$ topologischer Raum. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Mengen. Eine Menge $A \subseteq X$ ist abgeschlossen, falls das Komplement von A offen ist.

Sei $A \subseteq X$. Ferner Sei $\mathcal{T}_A := \{D \cap A : D \in \mathcal{T}\}$. Zeigen Sie, dass $(A, \mathcal{T}_A)$ ein topologischer Raum ist.

Beispiel 4.
Sei $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_- = \{\emptyset\} \cup \{X\} \cup \{]y,\infty[: y \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie: $\mathcal{T}_-$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 5.
Zeigen Sie f ist oberhalbstetig in $X \Leftrightarrow$

$$\forall_{x\in X}\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x_1\in X}(\|x-x_1\| < \delta \Rightarrow f(x_1) < f(x)+\epsilon).$$

Formulieren Sie adäquate Definitionen von unterhalbstetig wie hier und wie in Beispiel 8 vom Übungsblatt 12.

Beispiel 6.
Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist unterhalbstetig, wenn für alle $A \in \mathcal{T}_-$ (der Topologie aus Beispiel 4) gilt, dass $f^{-1}(A)$ offen ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass eine Menge in $\mathbb{R}$ mit der Standard-Topologie offen ist, wenn sie um jeden Punkt x in der Menge ein Intervall $]x-\delta, x+\delta[$ enthält.

Beispiel 7.

Sei $X = \mathbb{R}$ und $A \subseteq X$. Wann ist die Indikatorfunktion

$$\begin{aligned} 1_A : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

unterhalbstetig?

Beispiel 8.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f : A \to \mathbb{R}$ sei unterhalbstetig. Zeigen Sie: f nimmt auf A das Infimum an.

—