Übungsblatt 14

Beispiel 1.
Sei

$$f : [0,1]^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: f nimmt auf $[0,1]^3$ das Maximum und Minimum an.

Beispiel 2.
Sei (x_n) eine Cauchy-Folge in $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Gelten die Aussagen:

(a) $(f(x_n))$ ist eine Cauchy-Folge, wenn f stetig ist,

(b) $(f(x_n))$ ist eine Cauchy-Folge, wenn f gleichmäßig stetig auf A ist?

Beispiel 3.
Zeigen Sie, dass zumindest zwei verschiedene $x \in]0,2[$ existieren, die die Gleichung

$$3^x - 2 = 7^x - 8x$$

lösen.

Beispiel 4.
Zeigen Sie, dass a^x, $a > 0$, bis auf die Nullfunktion die einzigen stetigen Funktionen sind, die

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

erfüllen.

Beispiel 5.
Sei $0 < \epsilon < 1$. Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto x - \epsilon \sin(x)$ in $\mathbb{R}$ invertierbar ist. Schulisches Elementarwissen darf verwendet werden.

Beispiel 6.
Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen

(a) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin\left(\frac{a\sin(x)+b}{a+b\sin(x)}\right)$ für Konstanten $a > 0$ und $|b| < a$ im Bereich $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ und

(b) $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{ac-b}} \arctan \sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}}$ für Konstanten $ac - b > 0$, $a, b, c > 0$ im Bereich $0 < x$.

Bemerkung: $\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$ *und* $\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$.

Beispiel 7.
Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen

(a) $x \mapsto 2^{\sin(x)}$ und

(b) $x \mapsto e^{\sin(1/x^2)}$ für $0 \neq x$.

Beispiel 8.

Gegeben sei die Differentialgleichung (Gleichung für die Funktion f)

$$f'(x) = \cos(x) \text{ und } f(0) = 0.$$

Um $f(\pi)$ zu berechnen, könnte man wie folgt vorgehen: Für kleine h gilt näherungsweise

$$f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$$

und damit

$$f(0+h) \approx f(0) + hf'(0).$$

Mit Induktion erhält man:

$$f(0+nh) \approx f(0+(n-1)h) + hf'(0+(n-1)h) \approx f(0) + h\left(\sum_{k=0}^{n-1} f'(0+kh)\right).$$

Also, mit $nh = \pi$:

$$f(\pi) \approx f(0) + \frac{\pi}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f'(0+k\pi/n)\right).$$

Schreiben Sie ein Programm, welches für verschiedene Werte von $n = 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^{15}$ den Wert $f(\pi)$ näherungsweise berechnet. Was ist der Fehler zur exakten Lösung?

——