

Übungsblatt 1

Eindimensionale Analysis – Funktionen

Aufgabe 1

Haben die beiden Ungleichungen $x > 1$ und $x^2 > x$ dieselbe Lösungsmenge in den reellen Zahlen?

Aufgabe 2

Zeichnen Sie den Graphen folgender Funktionen:

a) $f(x) = |x + 1|$

b) $f(x) = |x| + |x + 1|$

Aufgabe 3

Zeichnen Sie den Graphen (ungefährer Verlauf) der folgenden Funktionen. Welche der Funktionen sind (un-)gerade, (a-)periodisch, (un-)beschränkt, (nicht) monoton, injektiv, surjektiv, bijektiv?

a) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = (x + 1)^2$

d) $f(x) = (x - 1)^2$

e) $f(x) = x^2 + 1$

f) $f(x) = x^2 - 1$

Aufgabe 4

Zeichnen Sie den Graphen (ungefährer Verlauf) der folgenden Funktionen. Welche der Funktionen sind (un-)gerade, (a-)periodisch, (un-)beschränkt, (nicht) monoton, injektiv, surjektiv, bijektiv?

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \cos 2x$

- c) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$
- d) $f(x) = \cos(x + \pi)$
- e) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$
- f) $f(x) = \tan x$

Aufgabe 5

Zeichnen Sie den Graphen (ungefährer Verlauf) der folgenden Funktionen. Welche der Funktionen sind (un-)gerade, (a-)periodisch, (un-)beschränkt, (nicht) monoton, injektiv, surjektiv, bijektiv?

- a) $f(x) = e^x$
- b) $f(x) = e^{x^2}$
- c) $f(x) = e^{-x}$
- d) $f(x) = e^{-(x-\mu)^2}, \mu \in \mathbb{R}$
- e) $f(x) = \log x$
- f) $f(x) = \log \frac{1}{x}$

Aufgabe 6

Stellen Sie eine algebraische Gleichung von möglichst niedrigem Grad auf, die folgende Lösungen hat: $1 \pm \sqrt{2}, 3$

Aufgabe 7

Stellen Sie eine algebraische Gleichung von möglichst niedrigem Grad auf, die folgende Lösungen hat: 4, Doppellösungen 0 und 2

Aufgabe 8

Von der folgenden Gleichung ist eine Lösung x_1 gegeben. Bestimmen Sie alle übrigen reellen Lösungen:

$$x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0, x_1 = 1$$

Aufgabe 9

Von der folgenden Gleichung sind zwei Lösungen x_1 und x_2 gegeben. Bestimmen Sie alle übrigen reellen Lösungen:

$$x^4 - x^3 - 27x^2 + 25x + 50 = 0, x_1 = -1, x_2 = 2$$

Aufgabe 10

Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion $\log(|2x-1|)$ so, dass diese eine Inverse besitzt.

Aufgabe 11

Untersuchen Sie die Stetigkeit folgender Funktionen:

a) $f(x) = x|x+1|$

b) $f(x) = x^2 \operatorname{sgn}(x+1) + 1$

c) $f(x) = x^2 \operatorname{sgn}x$

d) $f(x) = x \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$

Hinweis: Die Vorzeichenfunktion sgn (Signum) ist definiert als:

$$\operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 12

Untersuchen Sie die Stetigkeit folgender Funktionen:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{für } x > 1 \\ 0 & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x(1-x) & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 13

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 6x - 1 & \text{für } x < 3 \\ x^2 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

- Berechnen Sie $\lim_{x \downarrow 3} f(x)$ und $\lim_{x \uparrow 3} f(x)$.
- Ist f stetig in $x_0 = 3$? Ist f rechtsseitig stetig in $x_0 = 3$? Ist f linksseitig stetig in $x_0 = 3$?
- Betrachten Sie nun die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 6x - 1 & \text{für } x < 3 \\ x^2 + z & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

Für welchen Wert von z ist g stetig in $x_0 = 3$?

Aufgabe 14

Bestimmen Sie den Wert von a so, dass f stetig an der Stelle $x = 7$ ist:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{für } x \neq 7 \\ 3 & \text{für } x = 7 \end{cases}$$

Aufgabe 15

Untersuchen Sie die Grenzwerte folgender unbestimmter Ausdrücke:

- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x^4+4x+3}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$

Aufgabe 16

Bestimmen Sie:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \log x$$

Aufgabe 17

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{(x^2)}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log(x+1) - \log x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$