

Skriptum zur Vorlesung

Mathematische Modellierung

gehalten im Wintersemester 2009/2010

an der Universität Wien

Otmar Scherzer
Computational Science Center
Universität Wien
Nordbergstr. 15
A-1090 Wien
Austria

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	v
1 Beispiele	1
2 Vereinfachungen eines Modells	9
2.1 Grundlegende Vereinfachungen	9
2.2 Dimensionslose Analysis	13
2.3 Funktionale Abhängigkeit	16
2.4 Skalierung	17
3 Fouriertransformation	23
3.1 Trigonometrische Polynome	24
3.2 Fourierintegral	29
3.3 Fouriertransformation	32
4 Euler Gleichungen	35
4.1 Massenerhaltung	36
4.2 Momentengleichung	38
4.3 Energieerhaltung	42
4.4 Linearisierung	45
5 Diffusionsgleichungen	49
5.1 Wärmeleitungsgleichung	49
5.2 Schadstoffausbreitung	52
Literaturverzeichnis	57

Einleitung

Mathematische Modellierung hat die Aufgabe der *mathematischen Formulierung* von praktischen Aufgabenstellung. Die Anforderungen sind, aus einer oftmals unscharfen Formulierung einer Problemstellung ein mathematisches Modell, z.B. eine Gleichung, abzuleiten, welches analytisch und/oder numerisch berechenbar ist. Eine Schwierigkeit beim Übergang zur mathematischen Formulierung ist, dass geeignete Modellannahmen getroffen werden müssen, die der Praxis entsprechen und eine mathematische Formulierung erlauben. Die konkrete mathematische Modellierung erfordert viel Diskussion mit Anwendern über die Zulässigkeit von Modellannahmen. Die Modellierung ist zumeist ein subjektiver Prozess, und deshalb ist nach Abschluss der Modellierung eine entsprechende *Validierung* durchzuführen.

Wir unterscheiden üblicherweise zwischen *quantitativer* und *qualitativer* Modellierung. Im ersten Fall verwenden wir oftmals Mittel der *Computer-simulation*. Der Output sind Zahlen, mit denen wir quantitativ Zustände oder Veränderungen erfassen können. Bei der qualitativen Erfassung geht es üblicherweise nur um die Einordnung von zu erfassenden Zuständen, etwa ob ein Zustand eintritt oder nicht.

Gerade für mathematische Modelle, insbesondere die, die mit numerischer Simulation behandelt werden, sollte eine *dimensionslose* Beschreibung gewählt werden. Das bedeutet, dass alle Resultate nach der Simulation wieder in die Realität, d.h. mit Dimensionen, zurückinterpretiert werden müssen. Dieser Teil der Modellierung unterscheidet sich vielfach von physikalischer Modellbildung, wo Dimensionen eine entscheidende Rolle spielen.

Der Grundsatz der mathematischen Modellierung ist, eine der Problemstellung angemessene Methodik zu finden. Die Auswahl der Methodik und damit implizit des Modells ist immer subjektiv. Einzig und allein zählt, ob eine Validierung der Ergebnisse (sei es qualitativ oder quantitativ) erfolgreich ist.

Kapitel 1

Beispiele

In diesem Kapitel werden einige Beispiele präsentiert, welche mit elementaren mathematischen Hilfsmitteln behandelt und gelöst werden können. Die folgenden Beispiele sind dem Buch von R. Friedman [3] entnommen.

Beispiel 1.1. Stellen Sie sich vor, Sie fahren mit einem Boot auf einem kleinen, nicht sehr tiefen Teich. In Ihrem Boot befindet sich ein großer Stein, den Sie an der tiefsten Stelle des Teichs aus dem Boot werfen, sodass er vollkommen im Teich untergeht. Steigt der Wasserspiegel des Teichs, sinkt er, oder bleibt er gleich? ■

Man beachte in dieser Formulierung die vielen inexakten Formulierungen wie “kleiner, nicht sehr tiefer Teich”, “großer Stein”, usw. Diese Annahmen spielen eine Rolle, aber die konkreten Größen sind nicht wirklich relevant.

Lösung. Der Wasserstand des Teiches sinkt: Denken wir uns der Einfachheit halber, dass der Teich ein zylindrisches Gefäß mit kreisförmiger Grundfläche von Radius R ist. Befindet sich das Boot nicht im Wasser, dann ist das Volumen des Wassers $V_{\text{WASSER}} = R^2\pi h_0$. Schwimmt das Boot am Teich, so verdrängt es nach dem Archimedischen Prinzip eine Menge Wasser mit demselben Gewicht wie das Boot. Ist das Boot mit dem Stein beladen, so verdrängt es eine Menge Wasser mit einem Gewicht $M = M_{\text{BOOT}} + M_{\text{STEIN}}$. Aus dem Gesetz Masse = Volumen \times Dichte folgt, dass das durch das Boot mit dem Stein verdrängte Volumen gegeben ist durch

$$\frac{M}{D_{\text{WASSER}}} = \frac{M_{\text{BOOT}}}{D_{\text{WASSER}}} + \frac{M_{\text{STEIN}}}{D_{\text{WASSER}}},$$

wobei D_{WASSER} die Dichte des Wassers bezeichnet. In diesem Fall ergibt sich die Höhe des Wasserstandes h_1 aus der einfachen Beziehung

$$R^2\pi h_1 = V_{\text{WASSER}} + \frac{M_{\text{BOOT}}}{D_{\text{WASSER}}} + \frac{M_{\text{STEIN}}}{D_{\text{WASSER}}}.$$

Wird der Stein ins Wasser geworfen, so verdrängt er eine Menge Wasser, die genau seinem Volumen entspricht. Das Volumen des Steins ist gegeben durch $V_{\text{STEIN}} = \frac{M_{\text{STEIN}}}{D_{\text{STEIN}}}$, wobei D_{STEIN} die Dichte des Steins bezeichnet. In diesem Fall ergibt sich die Höhe des Wasserstandes h_2 aus der einfachen Beziehung

$$R^2\pi h_2 = V_{\text{WASSER}} + \frac{M_{\text{BOOT}}}{D_{\text{WASSER}}} + \frac{M_{\text{STEIN}}}{D_{\text{STEIN}}}.$$

Die Dichte des Steins ist größer als die Dichte des Wasser, da wir vorausgesetzt haben, dass der Stein untergeht. Folglich ist h_2 kleiner als h_1 , woraus folgt, dass der Wasserspiegel sinkt. ■

Um aus den obigen einfachen Rechnungen zur Erkenntnis zu erlangen, dass (und um wieviel) der Wasserspiegel des Teichs sinkt, wenn wir den Stein aus dem Boot in das Wasser werfen, trafen wir Annahmen; d.h., wir *modellierten die Problemstellung*: Eine Annahme, die getroffen wurde, war etwa, dass das Wasser eine konstante Dichte D_{WASSER} besitzt. In diesem Beispiel ist das gerechtfertigt, weil sowohl Wassertiefe (bzw. der mit der Tiefe zunehmende Druck) als auch Temperatur einen relativ geringen Einfluss auf die Wasserdichte haben. Die Einbeziehung von variablen Wasserdichten würde also das Ergebnis sowohl qualitativ als auch quantitativ praktisch nicht verändern, die auftretenden Gleichungen aber unnötig verkomplizieren. Damit ist es hier sinnvoll, von einer konstanten Wasserdichte auszugehen. Im Gegensatz dazu hängt die Lösung des folgenden Modellierungsproblems wesentlich vom Einfluss der Wassertemperatur auf die Dichte ab.

Beispiel 1.2. Welche Temperatur wird im Juli des nächsten Jahres am Grund eines tiefen Alpensees herrschen? ■

Lösung. Wird Wasser abgekühlt, so steigt seine Dichte bis zu einer Temperatur von 4°C . Bei weiterem Kühlen sinkt die Dichte langsam wieder ab, bis das Wasser bei 0°C gefriert und seine Dichte sprunghaft abnimmt und ein Minimum erreicht. Wegen der größeren Dichte von kaltem Wasser sinkt also in der kalten Jahreszeit zunächst kaltes Wasser von der Oberfläche nach unten und verdrängt warmes Wasser nach oben. Dieser Prozess geht solange vonstatten, bis die Umgebungstemperatur 4°C hat. Bei weiteren Absinken der Umgebungstemperatur beginnt der See zuzufrieren, wobei das Zufrieren aufgrund der geringeren Dichte von Eis von der Oberfläche ausgeht.

Das Wasser direkt unter dem Eis hat eine Temperatur von 0°C , während es in großen Tiefen eine Temperatur von ungefähr 4°C besitzt. Es würde mehrere Jahrzehnte dauern bis das Wasser durch reine Wärmeleitung am Grund des Sees in über hundert Metern Tiefe auf 0°C abgekühlt ist. Von der

Erwärmung im Frühling und im Sommer bleiben die untersten Wasserschichten verschont, weil diese wegen ihrer hohen Dichte nicht nach oben fließen können. ■

Die einfache Lösung von Beispiels 1.2 beruht auf der Tatsache, dass in großen Wassertiefen Wärme (also Energie) durch Masse transportiert wird, also dadurch, dass warme und kalte Wasserschichten aufgrund ihrer verschiedenen Dichten ausgetauscht werden.

Beispiel 1.3. 100 Gramm Wasser werden auf einen großen Tisch gegossen. Das Wasser bildet eine kreisförmige Pfütze mit einem Durchmesser von 0.3 Metern. Uns interessiert, wie lange es dauert, bis das Wasser vollkommen verdunstet ist? ■

Lösung. Unter den angegebenen allgemeinen Voraussetzungen kann die Fragestellung nicht beantwortet werden: Die Dauer des Verdunstens hängt nicht unwesentlich von der relativen Luftfeuchtigkeit, der Raumtemperatur und der Größe und Beschaffenheit des Raumes ab. Mit Fortdauern der Verdunstung erhöht sich die Luftfeuchtigkeit im Raum und führt zu einer Verlangsamung des Prozesses. Im Extremfall, bei einem zu kleinen Raum, kann die Luft bereits gesättigt sein, bevor das ganze Wasser auf dem Tisch verdunstet ist. Zusätzlich beeinflusst noch die Luftzirkulation im Raum die Geschwindigkeit des Verdunstens. Um eine exakte Abschätzung für den Verdunstungszeitraum angeben zu können, müssen also zumindest Informationen über die Raumtemperatur, die relative Luftfeuchtigkeit vor Beginn des Experiments, die Größe des Raumes und die Luftzirkulation im Raum vorhanden sein.

Wir nehmen an, dass die Lufttemperatur in dem abgeschlossenen Raum 20 Grad Celsius beträgt bei einer relativen Luftfeuchtigkeit von 40 Prozent. Es befinden sich 50 Kubikmeter Luft im Raum. Die Luft strömt um den Tisch mit einer Geschwindigkeit von einem Meter pro Sekunde. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich, dass die relative Luftfeuchtigkeit im Raum während des Verdunstungsprozesses zunehmen muss. Bei einer Lufttemperatur von 20 Grad Celsius enthält gesättigte Luft 17.4 Gramm Wasser pro Kubikmeter Luft. In einem Raum mit 50 Kubikmetern gesättigter Luft (d.h. 100 Prozent relativer Luftfeuchtigkeit), würden sich also $17.4 \times 50 = 870$ Gramm Wasser in der Luft befinden. Bei einer relativen Luftfeuchtigkeit von 40 Prozent zu Beginn des Experiments würden also $0.4 \times 870 = 348$ Gramm Wasser in der Luft enthalten sein. 100 Gramm Wasser, die durch Verdunstung zusätzlich in die Luft abgegeben werden, würden also zu 448 Gramm Wasser in der Luft führen, also zu einer relativen Luftfeuchtigkeit von etwa 51.5 Prozent. In der Praxis kann dieser hohe Anstieg der relativen Luftfeuchtigkeit nur

dann festgestellt werden, wenn der Raum vollkommen isoliert ist und keine Feuchtigkeit absorbierenden Wände oder Möbel besitzt. Am Ende des Experiments ist also mit einer relativen Luftfeuchtigkeit von weniger als 51.5 Prozent zu rechnen. Durch das Verdunsten des Wasser erhöht sich die Luftfeuchtigkeit im Raum, und damit wird während des Experiments die Verdunstung immer langsamer ablaufen. Die mittlere Luftfeuchtigkeit, während des Experiments wird 46 Prozent (das Mittel von 40 und 51.5 Prozent) nicht überschreiten und 40 Prozent nicht unterschreiten. Die obigen Überlegungen an die Beschaffenheit des Raumes (Feuchtigkeit absorbierende Materialien) und den immer langsamer ablaufenden Verdunstungsprozess, legen nahe anzunehmen, dass die mittlere relative Luftfeuchtigkeit im Raum während des Experiments etwa 43 Prozent beträgt.

Um nun aus der mittleren relativen Luftfeuchtigkeit die Zeit, die benötigt wird, bis die Wasserlache verdunstet ist, abzuschätzen, verwenden wir zuerst eine Formel für die Dicke einer wasserdampfgesättigten laminaren Luftschicht über der Wasseroberfläche:

$$\delta = \sqrt{F \frac{L}{V}}, \quad (1.1)$$

wobei δ die Dicke der Luftschicht ist (cm), L der Abstand der Lache von der nächsten Kante der ebenen Oberfläche, V die Geschwindigkeit der Luft über der Wasseroberfläche (cm/s), und $F = 1.69 \text{ cm}^2/\text{s}$. Um in die (zirkulierende) Luft zu gelangen, muss aufsteigender Wasserdampf zuerst diese laminare Luftschicht mittels Diffusion überwinden. Wir nehmen an, dass der Abstand der Wasserlache von der Tischkante 100 cm beträgt. Die Geschwindigkeit der Luftschicht sei 1 m/s, woraus sich $\delta = 1.3 \text{ cm}$ ergibt.

Aus diesen Überlegungen kann man die Verdunstungsrate von Wasser, also die Menge an Wasser, welche mittels Diffusion durch die Luftschicht entweicht, wie folgt berechnen:

$$r_V = D \frac{c_0 - c_\infty}{\delta}. \quad (1.2)$$

Dabei bezeichnet r_V den Verlust von Wasserdampf pro Zeit- und Flächeneinheit ($\text{g}/(\text{cm}^2\text{s})$), D den Diffusionskoeffizienten (cm^2/s), c_0 die Konzentration von Wasserdampf an der Wasseroberfläche (g/cm^3), und c_∞ die Konzentration von Wasserdampf in einiger Entfernung zur Oberfläche (g/cm^3).

An der Oberfläche der Lache herrscht eine relative Luftfeuchtigkeit von 100 Prozent, also ist (wie wir bereits vorher festgestellt haben) $c_0 = 17.4$ Gramm pro Kubikmeter Luft, oder $c_0 = 17.4 \times 10^{-6} \text{ g}/\text{cm}^3$. In einer Entfernung von der Lache herrscht während des Experiments eine mittlere relative

Luftfeuchtigkeit von 43 Prozent, also $c_\infty = 7.5 \times 10^{-6} \text{ g/cm}^3$. Bei einer Temperatur von 20 Grad Celsius ist der Diffusionskoeffizient von Wasserdampf $0.25 \text{ cm}^2/\text{s}$. Setzt man all diese Werte in (1.2) ein, so erkennt man, dass die Wasserlache mit einer Rate von $1.90 \times 10^{-6} \text{ g}/(\text{cm}^2\text{s})$ verdunstet. Nun nehmen wir an, dass die Wasserlache durch einen Zylinder beschrieben werden kann, welcher während des Experiments einen konstanten Durchmesser von 30cm besitzt. Anfänglich entspricht die Wasserlache demnach einem Zylinder mit Höhe $0.141 \text{ cm} = 100/(15^2\pi) \text{ cm}$. Das Verdunsten einer Schicht mit 0.141 cm Dicke benötigt nach der Formel Verdunstungszeit \times Verdunstungsrate = Wasserhöhe die Zeit

$$0.141/(1.91 \times 10^{-6}) \text{ s} \approx 72.000 \text{ s} = 20 \text{ Stunden} . \quad (1.3)$$

Versucht man dieses Ergebnis im Experiment nachzuweisen, so erkennt man, dass das Verdunsten erheblich langsamer vonstatten geht. In unseren Berechnungen haben wir bis jetzt vernachlässigt, dass beim Verdunsten von Wasser einem Körper Wärme entzogen wird (z.B. wird durch Schwitzen dem menschlichen Körper Wärme entzogen). Die Temperatur in der Lache ist daher geringer als die der Umgebung, weshalb das Verdunsten langsamer ablaufen wird.

Der Abtransport von Wärmeenergie durch Verdunstung führt dazu, dass die Temperatur in der Lache am Beginn des Experiments zu sinken beginnt. Der Abkühlung wirkt allerdings entgegen, dass auch Wärme von der Umgebung auf die Lache übertragen wird. Dieser Wärmefluss nimmt mit steigender Temperaturdifferenz zwischen Luft und Wasser zu. Nach relativ kurzer Zeit wird daher eine Gleichgewichtstemperatur erreicht, bei welcher der Wärmeverlust durch Verdunstung gleich dem Wärmegewinn aus der Umgebung der Lache ist. Ziel der folgenden Überlegungen ist es, diese Gleichgewichtstemperatur zu bestimmen.

Wärme kann auf drei Arten übertragen werden: Durch Wärmeleitung, durch Konvektion und durch Strahlung. In unserem Beispiel findet Konvektion zwischen der Lache und der vorbeiströmenden Luft statt, Wärmeleitung hingegen zwischen der Lache und dem Tisch. Der Energiegewinn pro Zeit- und Flächeneinheit durch Konvektion wird mittels der Formel

$$q_K(T) = \frac{k\Delta T}{\delta} \quad (1.4)$$

beschrieben. Dabei ist k die *thermische Leitfähigkeit* der laminaren Luftschicht und ΔT der Temperaturunterschied zwischen Wasser und Luft. Falls wir realistischerweise annehmen, dass der Tisch ein relativ schlechter Wärmeleiter ist (wie etwa ein gewöhnlicher Holztisch), so kann der Energiegewinn

durch Wärmeleitung gegenüber dem Energiegewinn durch Konvektion vernachlässigt werden.

Strahlung verbindet man üblicherweise mit hohen Temperaturen. Da in unserem Experiment relativ geringe Temperaturen vorherrschen, könnte man zunächst der Meinung sein, dass Strahlung ebenfalls eine untergeordnete Rolle spielen wird. Dass dies allerdings nicht der Fall ist, zeigt die folgende Berechnung. Nach der Stefan–Boltzmann Gleichung gilt für den Energiegewinn pro Zeit- und Flächeneinheit durch Strahlung

$$q_S(T) = 5.67 \times 10^{-12} (293^4 - T^4) \frac{\text{J}}{\text{cm}^2 \text{s}}. \quad (1.5)$$

Dabei sind $5.67 \times 10^{-12} \text{ J}/(\text{s cm}^2 \text{ K}^4)$ die Stefan–Boltzmann Konstante, 293 die Raumtemperatur in Grad Kelvin ($273 + 20$), und T die Temperatur der Wasserlache in Grad Kelvin (diese Gleichung ist vereinfacht — eigentlich braucht man noch Annahmen über das Strahlungsverhalten der Decke und das Absorptionsverhalten der Strahlung im Wasser). Setzt man $\Delta T = 293 - T$, so gelten die Gleichung

$$293^4 - T^4 = 293^4 \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta T}{293} \right)^4 \right],$$

und die Approximation (weil $\Delta T/293 \ll 1$)

$$\left(1 - \frac{\Delta T}{293} \right)^4 \approx 1 - 4 \frac{\Delta T}{293}.$$

Verwendet man diese Beziehungen in (1.5), so erhält man

$$q_S(T) \approx 5.70 \times 10^{-4} \Delta T \frac{\text{J}}{\text{cm}^2 \text{s}}. \quad (1.6)$$

Bei einer Temperatur von ungefähr 20 Grad Celsius ist $k \approx 2.57 \times 10^{-4} \frac{\text{J}}{\text{K cm s}}$. Damit folgt aus (1.4), dass

$$q_K(T) \approx 1.98 \times 10^{-4} \Delta T \frac{\text{J}}{\text{cm}^2 \text{s}}. \quad (1.7)$$

Diese Berechnungen zeigen, dass in unserem Experiment der Wärmegewinn durch Strahlung dem Wärmegewinn durch Konvektion sogar überwiegt.

Die gesamte Wärmeübertragung durch Strahlung und Konvektion von der Umgebung auf die Lache ist somit gegeben durch

$$q_K(T) + q_S(T) \approx 7.68 \times 10^{-4} \Delta T \frac{\text{J}}{\text{cm}^2 \text{s}}. \quad (1.8)$$

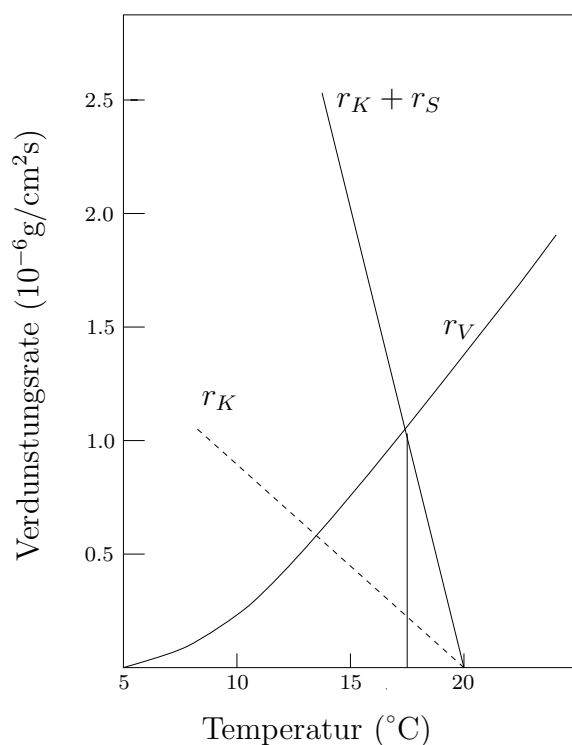


Abbildung 1.1: Effekte von Wärmeübertragungen

Zum Verdunsten von einem Gramm Wasser wird eine Energie von 2260 Joule benötigt. Damit erhalten wir aus (1.2) folgende Rate

$$q_V(T) = 2260 \text{ J} \times r_V(T) = 0.19 \left(c_0(T) \frac{\text{cm}^3}{\text{g}} - 7.5 \right) \frac{\text{J}}{\text{cm}^2 \text{ s}} \quad (1.9)$$

für den Energieverlustes durch Verdunstung. Dabei haben wir benützt, dass die Konzentration $c_0 = c_0(T)$ von Wasserdampf an der Oberfläche der Lache von der Temperatur T abhängt. Je geringer die Temperatur, desto kleiner ist $c_0(T)$, und desto langsamer läuft folglich die Verdunstung ab.

Die beiden Funktion $r_K(T_C + 273) + r_S(T_C + 273)$ (mit $r_K = q_K/(2260 \text{ J})$ und $r_S = q_S/(2260 \text{ J})$) sowie $r_V(T_C + 273)$ sind in Abbildung 1.1 dargestellt (T_C ist die Temperatur in Grad Celsius). Die Gleichgewichtstemperatur, die sich in der Lache einstellt, bestimmt sich aus dem Schnittpunkt dieser beiden Kurven zu etwa 16.5 Grad Celsius. Die zugehörige Verdunstungsrate ist $1.23 \times 10^{-6} \text{ g}/(\text{cm}^2 \text{ s})$. Die Oberfläche der Lache beträgt $225 \pi \text{ cm}^2$ und damit Verdunsten pro Sekunde 869×10^{-6} Gramm Wasser. Die 100 Gramm Wasser verdunsten also in etwa 32 Stunden, was als ein realistischer Wert angesehen werden darf. ■

Das vorangegangene Beispiel zeigt, dass Modellierung eines technisch-physikalischen Prozesses ein Vorgang ist, der viel Verständnis über die Natur des Problems verlangt. Die Auswahl der physikalischen Gesetzmäßigkeiten, die im Modell eine wichtige Rolle spielen, ist entscheidend.

Kapitel 2

Vereinfachungen eines Modells

Die Beispiele in Kapitel 1 zeigen, dass eine numerische Behandlung von praktischen Problemstellungen in der Regel nur dann möglich ist, wenn unter zusätzlichen, praktisch relevanten Annahmen die Komplexität des Problems erheblich reduziert werden kann. (Mathematische) Modellierung besteht auch darin, in einem (physikalischen) Modell Parameter zu vernachlässigen, sodass das vereinfachte Modell numerisch oder analytisch behandelbar ist und die Resultate signifikante Rückschlüsse auf die Lösung der ursprünglichen Problemstellung zulassen.

Diesem Kapitel dienen als Vorlage das Buch von Lin und Segel [4] und die Überblicksarbeit von Segel [5].

2.1 Grundlegende Vereinfachungen

Durch Vereinfachung eines gegebenen Gleichungssystems können unter Umständen teure Computerberechnungen und schwierige analytische Umformungen vermieden, aber trotzdem nützliche Resultate erzielt werden.

Die Vereinfachung von Modellen beruht auf folgender Idee:

1. Man bestimme auf geeignete Art die Parameter, die *relativ klein* sind. In praktischen Anwendungen wird ein Parameter ψ als relativ klein bezeichnet, wenn im Modell zumindest ein weiterer Parameter vorkommt, der gegenüber ψ signifikant ist, also einen deutlich höheren Einfluss auf die Lösung hat.
2. Die *relativ kleinen* Parameter werden aus dem System entfernt, und das resultierende vereinfachte Problem wird gelöst. Dieser Schritt ist nicht unproblematisch und kann nur dann als gerechtfertigt angesehen werden, wenn die *Konsistenz* dieses Schrittes überprüft wird.

3. *Prüfung der Konsistenz:* Man prüft, ob die Lösung des vereinfachten Systems mit den getroffenen Annahmen konsistent ist, also, ob die angenommenen kleinen Parameter tatsächlich klein sind.

Man beachte dabei, dass Konsistenz nur ein notwendiges Kriterium für die Zulässigkeit der Vereinfachung, nicht aber hinreichend ist. Weiter unten werden wir ein Beispiel einer Vereinfachung sehen, die sich zwar als konsistent herausstellt, aber zu einem Ergebnis führt, das nicht als Approximation der tatsächlichen Lösung angesehen werden kann.

Im folgenden wird diese Vorgangsweise an einem einfachen Beispiel untersucht:

Beispiel 2.1. Wir untersuchen das lineare Gleichungssystem

$$x + 10y = 21, \quad (2.1)$$

$$5x + y = 7. \quad (2.2)$$

In (2.1) ist der Koeffizient bei der Variablen x im Verhältnis zum Koeffizienten, der bei der Variablen y steht, relativ klein. Aus diesem Argument heraus nehmen wir an, dass der Koeffizient vor der Variablen x vernachlässigbar ist, wir betrachten also das vereinfachte Gleichungssystem

$$10y = 21,$$

$$5x + y = 7.$$

Die Lösung dieser vereinfachten Problemstellung ist

$$\hat{y} = 2.1, \quad \hat{x} = \frac{1}{5}(7 - 2.1) \approx 0.98. \quad (2.3)$$

Als nächstes ist zu überprüfen, ob die Vernachlässigung des Koeffizienten bei x zulässig war. Dazu zeigen wir, dass die Lösung der vereinfachten Gleichung nicht im Widerspruch zur Annahme steht, dass der erste Term der ersten Gleichung viel kleiner ist als der zweite Term. Setzt man die erhaltenen Werte \hat{x} und \hat{y} in (2.1) ein, so erkennen wir, dass das Verhältnis der beiden Terme deutlich kleiner als 1 ist, genauer:

$$\frac{\hat{x}}{10\hat{y}} = \frac{0.98}{21} \approx 0.05 \ll 1.$$

Dies zeigt, dass die getroffene Vereinfachung zumindest *konsistent* ist. Tatsächlich ist die exakte Lösung von (2.1) und (2.2) gegeben durch $x = 1$, $y = 2$; die Werte \hat{x} und \hat{y} stellen also wirklich eine Näherung der exakten Lösung dar. ■

Beispiel 2.2 (Projekttilproblem). Ein Körper der Masse m wird senkrecht zur Erdoberfläche nach oben geschleudert. Die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers an der Erdoberfläche ist V . Der Radius der Erde wird mit R bezeichnet; mit $x^*(t^*)$ bezeichnen wir den radialen Abstand von der Erdoberfläche zur Zeit t^* nach dem Abschuss des Projekttils. Falls der Luftwiderstand vernachlässigt wird, dann genügt x^* einer Differentialgleichung, die einfach abzuleiten ist: Das Projekttil hat nach einer Zeit t^* einen Weg

$$x^*(t^*) = \int_0^{t^*} v(t) dt$$

von der Erdoberfläche zurückgelegt; in dieser Formel beschreibt $v(t)$ die Geschwindigkeit des Projekttils zur Zeit t . Die Geschwindigkeit des Projekttils zur Zeit t^* kann mittels einer Integralbeziehung über die Beschleunigung des Projekttils $a(t)$ ausgedrückt werden:

$$v(t^*) = v(0) + \int_0^{t^*} a(t) dt .$$

In unserem Beispiel entspricht die Beschleunigung der negativen Erdbeschleunigung. Diese beträgt an der Erdoberfläche (also für $x^* = 0$) annähernd $g \approx 9.8\text{m/s}^2$ und nimmt quadratisch mit der Entfernung zur Erdoberfläche ab, also

$$a(t^*) = -g \frac{R^2}{(x^*(t^*) + R)^2} .$$

Insgesamt genügt damit x^* der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}}(t^*) = -\frac{gR^2}{(x^*(t^*) + R)^2} . \quad (2.4)$$

Zur Zeit $t^* = 0$ beträgt die Geschwindigkeit des Projekttils $v(0) = \frac{dx^*}{dt^*}(0) = V$, und das Projekttil wird von der Erdoberfläche aus abgefeuert, also $x^*(0) = 0$.

Wir werden nun wieder das Problem so weit vereinfachen, dass wir die Lösung des vereinfachten Problems explizit angeben können. Dazu treffen wir die Annahme, dass die Anfangsgeschwindigkeit des Projekttils gering ist. In diesem Fall wird — sofern das Modell die Realität genügend genau beschreibt — das Projekttil nicht sehr hoch fliegen, d.h., x^* wird im Verhältnis zum Erdradius immer relativ klein sein. Damit folgt, dass der Faktor $R^2/(x^*(t^*)+R)^2$ ziemlich gut durch 1 angenähert werden kann. Basierend auf dieser Argumentation betrachten wir an Stelle von (2.4) das vereinfachte Modell

$$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}}(t^*) = -g, \quad \frac{dx^*}{dt}(0) = V, \quad x^*(0) = 0 . \quad (2.5)$$

Die Lösung diese Problems kann explizit (etwa durch zweimaliges Integrieren) bestimmt werden. Wir erhalten als Lösung

$$\frac{dx^*}{dt}(t^*) = -gt^* + V, \quad x^*(t) = -\frac{1}{2}gt^{*2} + Vt^*. \quad (2.6)$$

Das Maximum von x^* wird zur Zeit $t^* = V/g$ angenommen und beträgt $V^2/2g$. Das Verhältnis der Lösung x^* des vereinfachten Problems und R überschreitet damit den Wert $V^2/2gR$ nicht. Nachdem wir angenommen haben, dass die Anfangsgeschwindigkeit V relativ klein ist, folgt, dass dieses Verhältnis und damit auch die Änderung der rechten Seite von (2.4) klein bleiben. Dies legt nahe, dass die getroffene Näherung konsistent ist. ■

Im nächsten Beispiel sehen wir, dass die Konsistenzüberlegungen, die wir in den obigen Beispielen angewendet haben, auch falsche Resultate liefern können.

Beispiel 2.3. Wir betrachten wieder ein lineares Gleichungssystem

$$0.01x + y = 0.1, \quad (2.7)$$

$$x + 101y = 11. \quad (2.8)$$

Wir argumentieren analog zu Beispiel 2.1: Der Koeffizient in (2.7) bei der Variablen x ist im Verhältnis zum Koeffizienten bei der Variablen y klein. Deshalb wird er vernachlässigt, und wir erhalten als Lösung des Näherungsproblems die Werte

$$\hat{y} = 0.1, \quad \hat{x} = 11 - 10.1 = 0.9. \quad (2.9)$$

Aus (2.9) können wir folgern, dass das Verhältnis der Terme auf der linken Seite von (2.7) im Punkt (\hat{x}, \hat{y}) gleich $0.009/0.1 = 0.09$, also relativ klein ist; woraus man schließen könnte, dass die Approximation konsistent ist. Die tatsächliche Lösung des ursprünglichen Problems ist aber $x = -90$, $y = 1$. Somit liegt die Lösung unserer Approximation für y um einen Faktor 10 daneben, die Approximation für x sogar um einen Faktor 100 und hat zusätzlich falsches Vorzeichen.

Um zu sehen, woher die hohen Fehler in der Lösung des Approximationsmodells kommen, untersuchen wir die Lösungen des Gleichungssystems

$$\varepsilon x + y = 0.1, \quad (2.10)$$

$$x + 101y = 11.$$

Im Fall $\varepsilon = 0.01$ haben wir die ursprüngliche Gleichung vorliegen, für $\varepsilon = 0$ ergibt sich das approximierte Problem. Die Lösung von (2.10) ist gegeben durch

$$x(\varepsilon) = \frac{0.9}{1 - 101\varepsilon}, \quad y(\varepsilon) = \frac{0.1 - 11\varepsilon}{1 - 101\varepsilon}; \quad \varepsilon \neq \frac{1}{101}. \quad (2.11)$$

Bei der Approximation von $x(0.01)$ und $y(0.01)$ durch $x(0)$ und $y(0)$, vernachlässigt man in der Gleichung (2.10) den Term $\varepsilon x(\varepsilon)$. Dieses Weglassen kann nur dann ein konsistenter Vorgang sein, wenn für die zu berechnende Lösung $\varepsilon = 0.01$ das Verhältnis $|0.01x(0.01)|$ zu $|y(0.01)|$ klein ist. Falls man nur die Lösungen des Approximationsmodells kennt, so kann der Faktor $|0.01x(0)/y(0)| = 0.09 \ll 1$ höchstens ein notwendige Maß für Konsistenz darstellen, nicht aber ein hinreichendes. In diesem Beispiel täuscht dieses Konsistenzmaß um einen Faktor 10. Die Schwierigkeit bei der approximativen Lösung ist, dass dieses Problem instabil vom Parameter ε abhängt. ■

2.2 Dimensionslose Analysis

Wir betrachten wieder das Projektilproblem Beispiel 2.2, das durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}}(t^*) = -\frac{gR^2}{(x^*(t^*) + R)^2} \quad (2.12)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\frac{dx^*}{dt^*}(0) = V \quad \text{und} \quad x^*(0) = 0$$

beschrieben wird. Die Lösung dieser Differentialgleichung hängt von insgesamt drei Parametern ab: von der Erdbeschleunigung g , dem Erdradius R und der Anfangsgeschwindigkeit V . Alle diese Parameter sind, wie auch die Funktion x^* und ihr Argument t^* , dimensionsbehaftet — so beschreibt etwa x^* eine Länge, besitzt also (meist) die Dimension Meter.

Im folgenden werden wir anhand von Gleichung (2.12) erläutern, wie wir eine Differentialgleichung dimensionslos machen können:

1. Zunächst wird eine Aufzeichnung aller Variablen und Parameter mit ihren zugehörigen Dimensionen angefertigt. In dem Projektilproblem hat man etwa:

Variable	Dimension
x^*	Länge \mathcal{L}
t^*	Zeit \mathcal{T}
Parameter	
Erdbeschleunigung g	$\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2}$
Anfangsgeschwindigkeit V	$\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1}$
Erdradius R	\mathcal{L}

2. Ist v^* eine Variable und p^* ein Parameter von der gleichen Dimension wie v^* , dann ist v^*/p^* dimensionslos.

Im Projekttilbeispiel haben R und x^* die gleiche Dimension. RV^{-1} hat die gleiche Dimension wie t^* . Man kann also etwa die zwei dimensionslosen Variablen

$$\tau = \tau(t^*) = \frac{t^*}{RV^{-1}}, \quad (2.13)$$

$$y(\tau) = y(\tau(t^*)) = \frac{x^*(t^*)}{R} \quad (2.14)$$

eingeführen. Aus der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^*(t^*)}{dt^{*2}} &= \frac{d^2 R y(\tau(t^*))}{dt^{*2}} \\ &= R \frac{d}{dt^*} \left(\frac{\partial y(\tau(t^*))}{\partial \tau} \frac{d\tau(t^*)}{dt^*} \right) \\ &= R \frac{d}{dt^*} \left(\frac{\partial y(\tau(t^*))}{\partial \tau} \frac{V}{R} \right) \\ &= V \frac{d}{dt^*} \left(\frac{\partial y(\tau(t^*))}{\partial \tau} \right) \\ &= V \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial y(\tau(t^*))}{\partial \tau} \right) \frac{d\tau(t^*)}{dt^*} \\ &= \frac{V^2}{R} \frac{\partial^2 y(\tau(t^*))}{\partial \tau^2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Zusammen mit der Beziehung

$$\frac{gR^2}{(x^*(t^*) + R)^2} = \frac{g}{(y(\tau(t^*)) + 1)^2}$$

folgt somit

$$\varepsilon \frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} = -\frac{1}{(y(\tau) + 1)^2} \quad (2.16)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = \frac{1}{R} \frac{dx^*(t^*(\tau))}{d\tau}(0) = \frac{1}{R} \frac{\partial x^*}{\partial t^*} \frac{dt^*}{d\tau}(0) = 1,$$

wobei

$$\varepsilon = \frac{V^2}{gR}. \quad (2.17)$$

Der Parameter ε ist ebenfalls dimensionslos:

$$\frac{(\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1})^2}{\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2}\mathcal{L}} = \mathcal{L}^0\mathcal{T}^0.$$

Die Transformationen, die verwendet werden, um eine Differentialgleichung in dimensionslose Form zu bringen, führen häufig zu einer einfacheren Form der Differentialgleichung mit einer geringen Anzahl von Parametern. Im Projekttilbeispiel 2.2 hing die Lösung von den Parametern g , R und V ab:

$$x^* = x^*(t^*; g, R, V). \quad (2.18)$$

Die Lösung der dimensionslosen Gleichung (2.16) hingegen hängt nur von einem einzigen Parameter ε ab:

$$y = y(\tau; \varepsilon). \quad (2.19)$$

Die Bestimmung der dimensionslosen Variablen und Parameter ist nicht eindeutig. Alternativ zu (2.14) und (2.13) könnte man die dimensionsunabhängigen Variablen

$$z = \frac{x^*}{R}, \quad \tau_1 = \frac{t^*}{\sqrt{Rg^{-1}}} \quad (2.20)$$

betrachten, woraus durch Substitution aus (2.4) folgende Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen abgeleitet werden kann:

$$\frac{d^2 z(\tau_1)}{d\tau_1^2} = -\frac{1}{(z(\tau_1) + 1)^2}, \quad z(0) = 0, \quad \frac{dz}{d\tau_1}(0) = \sqrt{\varepsilon}, \quad (2.21)$$

was zu einer Lösung $z = z(\tau_1; \varepsilon)$ führt.

Alle Parameter, die in dem Projekttilproblem vorkommen, hängen einzig und allein vom Parameter ε ab. Möchte man im Projekttilproblem die dimensionslose Zeit τ_M bestimmen, bei der das Projektil seinen maximalen Punkt erreicht, so muss die Optimalitätsbedingung $\left. \frac{dy}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_M} = 0$ gelöst werden. Die Lösung dieser Gleichung hängt von ε ab, kann also in der Form $\tau_M = f(\varepsilon)$ geschrieben werden. Die dimensionslose Zeit kann gemäß der Formel

$$\tau_M = \frac{t_M^*}{RV^{-1}} = f\left(\frac{V^2}{gR}\right) = f(\varepsilon) \quad (2.22)$$

in reale Zeit umgerechnet werden.

2.3 Funktionale Abhängigkeit

Falls alle Variablen und Parameter, die in der Differentialgleichung eine Rolle spielen, bekannt sind, so kann die Formel (2.22) auch dann abgeleitet werden, falls die zugrundeliegende Differentialgleichung unbekannt ist.

Wir gehen von der realistischen Annahme aus, dass die Parameter in einem Problem die Dimension $\mathcal{M}^a \mathcal{L}^b \mathcal{T}^c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ besitzen. Um auf dimensionslose Form zu kommen, muss man Parameterkombinationen einführen, sodass für diese Kombination die Exponenten verschwinden.

Wir betrachten wieder das Projektilproblem:

1. Ein Term π , der aus einem Produkt von Exponenten der in dem Problem vorkommenden Parameter besteht, lässt sich schreiben als

$$\pi = V^{\alpha_1} g^{\alpha_2} R^{\alpha_3}; \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}. \quad (2.23)$$

2. Einsetzen der Dimensionen der verschiedenen Parameter liefert:

$$\text{Dimension von } \pi = (\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1})^{\alpha_1} (\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2})^{\alpha_2} \mathcal{L}^{\alpha_3} = \mathcal{L}^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \mathcal{T}^{-\alpha_1 - 2\alpha_2}.$$

3. Damit π dimensionslos ist, müssen alle Exponenten verschwinden. Man erhält also folgendes lineares System:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad -\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0.$$

4. Man löse das Gleichungssystem mit Hilfe einer Konstanten

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= c_1, & c_1 &\neq 0 \text{ beliebig;} \\ \alpha_1 &= -2c_1, & \alpha_3 &= -(-2c_1 + c_1) = c_1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

5. Rücksubstitution in (2.23) liefert eine dimensionslose Größe in Abhängigkeit von c_1 .

Für das Projektilbeispiel folgt aus (2.23) und (2.24), dass wir mit der Wahl

$$\pi = \left(\frac{gR}{V^2} \right)^{c_1}$$

einen dimensionslosen Parameter erhalten. Damit kann jede dimensionslose Größe als eine Funktion von π geschrieben werden. Konkret, falls eine Lösung der Gleichung

$$\frac{t_M^* \sqrt{g}}{\sqrt{R}} = \Phi(V, g, R)$$

gesucht wird, folgt aus den obigen Überlegungen, dass mit einer geeigneten Funktion ϕ folgende Beziehung gilt:

$$t_M^* = \sqrt{g^{-1}} \sqrt{R} \phi\left(\frac{V^2}{gR}\right).$$

Durch Einschachteln von V und V^{-1} , bzw. unter Verwendung von $R^{1/2} = RR^{-1/2}$ erhalten wir

$$t_M^* = RV^{-1}R^{-1/2}Vg^{-1/2}\phi\left(\frac{gR}{V^2}\right),$$

woraus folgt, dass

$$t_M^* = RV^{-1}f(\varepsilon)$$

mit einer Funktion $f(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\phi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, was der Darstellung der Funktion f in (2.22) entspricht.

Die dimensionslose Zeit zum Erreichen der maximalen Flughöhe des Projektils hängt nur von der Größe V^2/gR ab. Bei einer numerischen Lösung muss man für die richtige Wahl der Diskretisierung nur die dimensionslose Größe V^2/gR berücksichtigen und nicht die absoluten Werte von V , g , R .

2.4 Skalierung

Viele mathematische Problemstellungen beinhalten sehr kleine oder sehr große Parameter. Wir beschäftigen uns im folgenden nur mit kleinen Parametern. Mit der Variablentransformation $\varepsilon = 1/\lambda$ können jederzeit große Parameter in kleine übergeführt werden. Nutzen aus dem Wissen zu ziehen, dass ein Parameter klein ist, ist schwierig, wie wir in den vorangegangenen Beispielen bereits gesehen haben.

Eine einfache Möglichkeit, wie kleine Parameter zur Vereinfachung eines Modells verwendet werden können, ist, die Variablen als fix gegeben zu betrachten und dann den Grenzwert des kleinen Parameters gegen Null zu berechnen. Wir illustrieren dies am folgenden einfachen Beispiel:

$$u(x, \varepsilon) = x + e^{-x/\varepsilon}, \quad 0 < x \leq 1, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.25)$$

Für $0 < x \leq 1$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = x. \quad (2.26)$$

Führt man statt der Variablen x die neue Variable $\zeta = x/\varepsilon$ ein, so erhält man

$$v(\zeta, \varepsilon) = u(\varepsilon\zeta, \varepsilon) = \varepsilon\zeta + e^{-\zeta}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(\zeta, \varepsilon) = e^{-\zeta}. \quad (2.27)$$

Führt man statt der Variablen x die neue Variable $\eta = x/\varepsilon^2$ ein, so erhält man

$$w(\eta, \varepsilon) = u(\varepsilon^2\eta, \varepsilon) = \varepsilon^2\eta + e^{-\eta\varepsilon}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w(\eta, \varepsilon) = 1. \quad (2.28)$$

Welcher der vier Grenzwerte

$$x, e^{-\zeta}, e^{-x/\varepsilon}, 1 \quad (2.29)$$

liefert uns eine gute Approximation von u ?

Bevor wir uns um die korrekte Antwort zu dieser Fragestellung kümmern, betrachten wir noch einmal die Differentialgleichung für das Projektilproblem:

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} = -\frac{gR^2}{(x^* + R)^2}, \quad x^*(0) = 0, \quad \frac{dx^*}{dt^*}(0) = V. \quad (2.30)$$

Durch das Einführen einer Referenzlänge R und einer Referenzzeit RV^{-1} , führten wir die dimensionslosen Variablen

$$y = \frac{x^*}{R}, \quad \tau = \frac{t^*}{RV^{-1}}. \quad (2.31)$$

ein und erhielten

$$\varepsilon \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{1}{(y+1)^2}, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = 1. \quad (2.32)$$

Mit einer anderen Wahl von dimensionslosen Variablen als in (2.20) erhält man die Gleichung (2.21). Der naive Ansatz, in den Gleichungen (2.32) und (2.21) die Terme, die mit ε multipliziert werden, zu vernachlässigen, führt auf folgende Gleichungen:

$$-(y+1)^{-2} = 0, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = 1, \quad (2.33)$$

$$\frac{d^2z}{d\tau_1^2} = -\frac{1}{(z+1)^2}, \quad z(0) = 0, \quad \frac{dz}{d\tau_1}(0) = 0. \quad (2.34)$$

Untersucht man diese zwei Gleichungen genauer, so erkennt man, dass (2.33) keine Lösung besitzt, während (2.34) nur eine Lösung besitzt, die negativ ist, was mit unseren Modellannahmen nicht vereinbar ist.

Es gibt im allgemeinen mehrere Möglichkeiten, wie man eine Gleichung mit dimensionsabhängigen Parametern auf dimensionslose Form bringen kann. Die Kunst der mathematischen Modellierung besteht darin, die Parameter so zu wählen, dass kleine Parameter in der dimensionslose Form der Gleichung vernachlässigbar sind. Die Auswahl der Parameter nach obigen Richtlinien nennt man *Skalierung*. Der Vorgang des Skalierens wird im folgenden anhand des Projektilproblems erläutert: Wir setzen voraus, dass die Entfernung des Projektils von der Erdoberfläche immer relativ gering bleibt. In Dimensionen ausgedrückt können wir diese Annahme wie folgt formulieren: V ist im Vergleich zu $(Rg)^{1/2}$ klein — $(Rg)^{1/2}$ ist die einzige mögliche Kombination von Potenzen von R und g , die zur gleichen Dimension wie V führen.

Falls $x^* \ll R$ ist, dann hat die Beschleunigung immer die selbe Ordnung wie g , die Gravitationsbeschleunigung an der Erdoberfläche. Wird das Projektil mit einer Geschwindigkeit V abgefeuert und dann gleichmäßig gebremst (durch die Erdanziehung), so kommt das Projektil nach einer Zeit V/g (am höchsten Punkt der Flugbahn) zum Stillstand. Nimmt man den Durchschnitt von Anfangs (V) - und Endgeschwindigkeit (0 am Wendepunkt), so können wir die mittlere Höhe der Flugbahn abschätzen: $\frac{1}{2}V\frac{V}{g}$. Damit haben wir auch eine Abschätzung für die maximale Höhe der Flugbahn. Die ursprüngliche Annahme, dass die maximale Flughöhe des Projektils im Verhältnis zum Erdradius klein ist, kann ausgedrückt werden durch

$$V^2/g \ll R.$$

Unter Verwendung obiger Abschätzung für die maximale Flughöhe versuchen wir alle Parameter so zu skalieren, dass alle vorkommenden Terme von der Größenordnung 1 sind. Aus den bisherigen Überlegungen folgt:

1. Die maximale Entfernung des Projektils von der Erdoberfläche kann durch V^2/g abgeschätzt werden.
2. Damit ergibt sich aus der Differentialgleichung (2.30) eine Abschätzung für d^2x^*/dt^{*2} von der Größenordnung $-g$.

Die erste Annahme legt die Wahl einer dimensionslosen Größe

$$x = \frac{x^*}{V^2g^{-1}} \tag{2.35}$$

nahe. Zusammen mit einer Zeitskalierung

$$t = \frac{t^*}{Vg^{-1}} \tag{2.36}$$

erhält man durch Substitution in (2.4) die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{R^2}{(xV^2g^{-1} + R)^2}, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1. \quad (2.37)$$

Also haben wir

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(1 + \varepsilon x)^{-2}, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1, \quad \text{mit } \varepsilon = \frac{V^2g^{-1}}{R}. \quad (2.38)$$

Man beachte, dass in der letzten Gleichung der Term ε relativ klein ist, woraus wir aus unserer Modellannahme (geringe Abschussgeschwindigkeit) auch schließen können, dass εx relativ klein ist, was nahe legt, dass die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = -1 \quad (2.39)$$

mit Anfangsbedingungen

$$\tilde{x}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\tilde{x}}{dt}(0) = 1$$

bereits ein gute Näherung von (2.38) darstellt. Die Lösung von (2.39) kann explizit berechnet werden:

$$\tilde{x}(t) = t - \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Die Differentialgleichung (2.39) kann auch leicht in dimensionsabhängiger Form geschrieben werden:

$$\frac{d^2\tilde{x}^*}{dt^2} = -g \quad \text{mit Anfangsbedingungen } \tilde{x}^*(0) = 0, \quad \frac{d\tilde{x}^*}{dt}(0) = V. \quad (2.40)$$

Im Projektilproblem beruht unsere Skalierung auf der Annahme, dass $\varepsilon \ll 1$ ist. Wäre hingegen $\varepsilon^{-1} \ll 1$, dann wäre unsere Skalierung unpassend. Die Ableitung der skalierten Gleichungen erfordert eine genaue Kenntnis der physikalischen Grundlagen des Problems. In der Herleitung der Skalierung haben wir die dimensionslosen Parameter auf Grund der physikalischen Überlegung eingeführt, dass bei einer niedrigen Abschussgeschwindigkeit des Projektils die maximale Flughöhe des Projektils relativ niedrig ist.

Die Wahl der Skalen hängt vom Wertebereich der Parameter ab

Wir betrachten zuerst ein Phänomen in einer Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$F\left(u^*, \frac{du^*}{dx^*}\right) = 0. \quad (2.41)$$

Die unabhängige Veränderliche x^* , die wir im folgenden als Ortsvariable bezeichnen, sei auf dem Intervall I^* (welches auch unendlich sein kann) definiert. Wir führen die folgenden dimensionslosen Größen ein:

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad u = \frac{u^*}{U}. \quad (2.42)$$

Somit gilt:

$$u^*(x^*) = Uu\left(\frac{x^*}{L}\right), \quad \frac{du^*}{dx^*}(x) = \frac{U}{L} \frac{du}{dx}(x) \Big|_{x=\frac{x^*}{L}}. \quad (2.43)$$

Sei $I_* = I^*L$ das transformierte Intervall. Wenn U und L so gewählt werden, dass

$$U \approx \max_{x^* \in I_*} u^*(x^*) \quad \text{und} \quad \frac{U}{L} \approx \max_{x^* \in I_*} \frac{du^*}{dx^*},$$

dann gilt, dass die maximalen Werte der skalierten Funktionen u und $\frac{du}{dx}$ immer ungefähr 1 sind.

Für *exakte Skalen*

$$U = \max_{x^* \in I_*} |u^*(x^*)|, \quad (2.44)$$

und

$$\frac{U}{L} = \max_{x^* \in I_*} \left| \frac{du^*}{dx^*} \right| \quad (2.45)$$

folgt

$$L = \frac{\max_{x^* \in I_*} |u^*(x^*)|}{\max_{x^* \in I_*} \left| \frac{du^*}{dx^*} \right|}.$$

Für die Funktion u definiert in (2.25) ergibt sich für $\varepsilon \ll 1$:

- Falls x^* signifikant größer als ε ist (d.h. im äußeren Gebiet), dann sind

$$|u^*|_{\max} = 1 \quad \text{und} \quad \left| \frac{du^*}{dx^*} \right|_{\max} = 1, \quad \text{also } U = 1, \quad L = 1.$$

Mit dieser Skalierung gilt $u(x, \varepsilon) = x + \exp(-x/\varepsilon)$.

- Falls x^* signifikant kleiner als ε ist, dann gilt

$$|u^*|_{\max} \approx 1 \quad \text{und} \quad \left| \frac{du^*}{dx^*} \right|_{\max} = \varepsilon^{-1}, \quad \text{also } U = 1, L = \varepsilon .$$

Verwendet man $\zeta = x^*/\varepsilon$ und $v = u^*$ als skalierte Variablen in dem inneren Gebiet, so folgt

$$v(\zeta, \varepsilon) = u^*(\varepsilon\zeta, \varepsilon) = \varepsilon\zeta + \exp(-\zeta) .$$

Um eine erste Näherung von u^* in den zwei Gebieten zu erhalten (die unabhängig von ε fix gehalten werden), betrachten wir die Grenzwerte $\varepsilon \rightarrow 0$ auf jedem der beiden Teilgebiete: Im äußeren Gebiet ergibt sich: $u(x, \varepsilon) \approx x$. Im inneren Gebiet gilt $v(\zeta, \varepsilon) \approx \exp(-\zeta)$, also $u(x, \varepsilon) \approx \exp(-x/\varepsilon)$.

Diese Rechnungen zeigen also, dass eine sinnvolle Skalierung abhängig ist von den betrachteten Werten. Die Frage nach der richtigen Wahl einer Approximation in (2.29) hängt also davon ab, auf welchem Intervall die Variable x^* betrachtet wird.

Kapitel 3

Fouriertransformation

Viele beobachtete Phänomene sind periodisch bezüglich der Zeit. Beispiele sind *Stromstärke* und *Spannung* von *Wechselstrom* (AC). Mathematisch werden solche Phänomene durch periodische Funktionen beschrieben.

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *periodisch* falls eine Zahl $T \in \mathbb{R}$, genannt *Periode*, existiert, sodass

$$f(t + T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} .$$

Ein Beispiel einer nicht konstanten periodischen Funktion ist

$$t \mapsto A \sin(\omega t + \alpha) .$$

Dabei bezeichnet $|A|$ die *Amplitude* und α die *Phasenverschiebung*. Die Periode dieser Funktion ist $2\pi/\omega$.

Wir betrachten die Bewegung auf einem Kreis, wobei $\phi(t) \in (-\pi, \pi]$ die Winkelposition zur Zeit t bezeichnet. Die *Winkelgeschwindigkeit*

$$\nu(t) = \phi'(t) \tag{3.1}$$

bezeichnet die Veränderung des Winkels bezüglich der Zeit. Die *Umrundungszeit* T für einen Kreis mit einem Radius r bei konstanter Geschwindigkeit v genügt der Gleichung

$$v = \frac{2\pi r}{T} . \tag{3.2}$$

$1/T$ nennt man *Frequenz*; dies ist die Anzahl der Umrundungen pro Zeitintervall. Die Frequenz wird in Hertz (Hz) gemessen.

$$1\text{s}^{-1} = 1\text{Hz} .$$

3.1 Trigonometrische Polynome

Definition 3.1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir mit τ_n die Menge der komplexen Linearkombinationen der Funktionen $\theta \mapsto \exp(ik\theta)$, $-n \leq k \leq n$. Jedes Element $t \in \tau_n$,

$$t(\theta) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k \exp(ik\theta), \quad \alpha_k \in \mathbb{C}, \quad (3.3)$$

wird *trigonometrisches Polynom* vom Grad n genannt. ■

Man kann sich τ_n als die Menge der Signale vorstellen, die aus Frequenzen $2\pi/k$, $k = -n, \dots, n$, bestehen.

Die Funktionen

$$\theta \mapsto \sin(k\theta) \text{ und } \theta \mapsto \cos(l\theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi], \quad k, l \in \mathbb{N},$$

sind orthogonal, d.h., es gilt für alle $k, l \in \mathbb{N}$, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\theta) \cos(l\theta) d\theta = 0,$$

und für $k \neq l$, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\theta) \sin(l\theta) d\theta = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\theta) \cos(l\theta) d\theta.$$

Aus diesen Beziehungen lässt sich ableiten, dass die Menge der Funktionen

$$\{\cos(k\theta) : k \in \mathbb{N}, \theta \in [-\pi, \pi]\} \cup \{\sin(k\theta) : k \in \mathbb{N}, \theta \in [-\pi, \pi]\}$$

linear unabhängig auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ ist. Somit sind auch die periodischen Erweiterungen auf die reelle Achse linear unabhängig.

Nun wollen wir die Koeffizienten von reellwertigen trigonometrischen Polynomen untersuchen. Sei dazu $t \in \tau_n$ mit den Koeffizienten

$$\alpha_k = \frac{a_k}{2} - i \frac{b_k}{2}, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = -n, \dots, n.$$

Dann folgt aus der Beziehung $\exp(k\theta) = \cos(k\theta) + i \sin(k\theta)$, dass

$$\begin{aligned} t(\theta) &= \sum_{k=-n}^n \left(\frac{a_k}{2} \cos(k\theta) + \frac{b_k}{2} \sin(k\theta) \right) \\ &\quad + i \sum_{k=-n}^n \left(-\frac{b_k}{2} \cos(k\theta) + \frac{a_k}{2} \sin(k\theta) \right). \end{aligned}$$

Die lineare Unabhängigkeit der Sinus und Kosinus Funktionen impliziert, dass der Imaginärteil von t verschwindet (also t reell ist), genau dann wenn

$$\sum_{k=-n}^n b_k \cos(k\theta) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=-n}^n a_k \sin(k\theta) = 0 .$$

Das ist der Fall, wenn die Koeffizienten der Beziehung $b_k = -b_{-k}$ und $a_k = a_{-k}$ genügen, also $\alpha_k = \overline{\alpha_{-k}}$ für alle $k = 0, \dots, n$. Insbesondere gilt $b_0 = 0$. Damit gilt für eine reellwertige Funktion t , dass

$$\begin{aligned} t(\theta) &= \sum_{k=-n}^n \left(\frac{a_k}{2} \cos(k\theta) + \frac{b_k}{2} \sin(k\theta) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=-n}^{-1} \left(\frac{a_k}{2} \cos(k\theta) + \frac{b_k}{2} \sin(k\theta) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{2} \cos(k\theta) + \frac{b_k}{2} \sin(k\theta) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_{-k}}{2} \cos(-k\theta) + \frac{b_{-k}}{2} \sin(-k\theta) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{2} \cos(k\theta) + \frac{b_k}{2} \sin(k\theta) \right) . \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt, kann ein reellwertiges Polynom dargestellt werden als

$$t(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)) , \quad (3.4)$$

wobei

$$a_0 = 2\alpha_0, \quad a_k = 2 \operatorname{Re}(\alpha_k), \quad b_k = -2 \operatorname{Im}(\alpha_k), \quad k = 1, \dots, n . \quad (3.5)$$

Wir werden häufig folgendes Resultat über die Approximation einer Funktion verwenden:

Satz 3.2. *Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein komplexer Hilbertraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Weiters sei X_n ein endlich-dimensionaler Teilraum von X und $(\phi_i)_{i=1}^n$ eine orthonormale Basis von X_n .*

Dann gilt für alle $f \in X \setminus X_n$, dass die Funktion

$$f_n = \sum_{i=1}^n \langle f, \phi_i \rangle \phi_i$$

die beste Approximation von f in X_n ist, das heißt

$$\|f - f_n\| < \|f - g\|$$

für alle $g \in X_n \setminus \{f_n\}$.

Der folgende Satz gibt an, wie eine quadratisch integrierbare Funktion $f \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ möglichst gut durch ein trigonometrisches Polynom approximiert werden kann.

Satz 3.3. *Die Familie der Funktionen*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ik\theta), \quad k = -n, \dots, n, \quad (3.6)$$

bildet eine orthonormale Basis von τ_n im Hilbertraum $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$.

Die beste Approximation von f in τ_n ist

$$t(\theta) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k \exp(ik\theta)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \exp(-ik\theta) d\theta, \quad k = -n, \dots, n. \quad (3.7)$$

Nun studieren wir den Grenzwert der besten Approximation für $n \rightarrow \infty$. Die Koeffizienten α_k sind unabhängig von n . Deshalb gilt für $n \rightarrow \infty$, dass die Approximationen gegen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \exp(ik\theta) \quad (3.8)$$

konvergieren. Diese Reihe wird *formale Fourierreihe* von f genannt.

Bemerkung 3.4. Die Elemente der Menge

$$\tau_n^\pi = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(k\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(k\cdot) : k = 1, \dots, n \right\}$$

sind orthonormal in $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{R})$.

Die beste Approximation f_b einer reellwertigen Funktion f auf τ_n^π ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f_b(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos(k\tau) d\tau \right) \cos(k\theta) \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin(k\tau) d\tau \right) \sin(k\theta). \end{aligned}$$

Schreibt man die Fourierkoeffizienten von f_b als $\alpha_k = \frac{a_k}{2} - i\frac{b_k}{2}$, so gilt:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(k\theta) d\theta, \quad k = 1, \dots, n, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(k\theta) d\theta, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

■

Die *Fourieranalyse* beschäftigt sich mit der Konvergenz der formalen Fourierreihe. Man kann zeigen, dass $f \in L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$ ist, genau dann wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |\alpha_k|^2 < \infty.$$

Darüber hinaus gilt für $f \in L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$ die Beziehung

$$\|f\|_{L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})} = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |\alpha_k|^2 < \infty.$$

Beispiel 3.5. Wir berechnen nun die Fourierreihe der charakteristischen Funktion $\chi_{[a,b]}$ des Intervalls $[a, b] \subseteq (-\pi, \pi)$. Die Fourierkoeffizienten von $\chi_{[a,b]}$ sind gegeben durch

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \exp(-ik\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Seien

$$c = (a + b)/2 \quad \text{und} \quad d = (b - a)/2 < \pi.$$

Damit gilt $c + d = b$ und $c - d = a$, und somit

$$\alpha_0 = (b - a)/2\pi = d/\pi .$$

Für $k \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-ik} \exp(-ik\theta) \Big|_{\theta=a}^b \\ &= -\frac{1}{2k\pi i} \exp(-ikc) (\exp(-ikd) - \exp(ikd)) \\ &= -\frac{1}{2k\pi i} \exp(-ikc) (\cos(kd) - i \sin(kd) - \cos(kd) - i \sin(kd)) \\ &= \frac{1}{\pi} \exp(-ikc) \frac{\sin(kd)}{k} . \end{aligned}$$

Damit ist die formale Fourierreihe von $\chi_{[a,b]}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{d}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \exp(-ikc) \frac{\sin(kd)}{k} \exp(ik\theta) \\ &= \frac{d}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kd)}{k} (\exp(ik(\theta - c)) + \exp(-ik(\theta - c))) \\ &= \frac{d}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kd)}{k} \cos(k(\theta - c)) . \end{aligned}$$

■

Reelle Sinus and Kosinus Entwicklung

Sei f eine reellwertige ungerade 2π -periodische Funktion, d.h., für alle $\theta \in (-\pi, \pi)$ ist $f(\theta) = -f(-\theta)$. Dann gilt $\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau = 0$. Weiters gilt für eine gerade Funktion f , d.h., $f(\theta) = f(-\theta)$ für alle θ , dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\pi} f(\tau) d\tau .$$

Ist f eine gerade Funktion, so ist die Abbildung $\theta \mapsto f(\theta) \sin(k\theta)$ ungerade, und damit gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $b_k = 0$. Also hat die (reelle) Fourierreihe einer geraden, reellen Funktion nur Kosinus-Terme:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) . \quad (3.9)$$

Für eine gerade, reellwertige Funktion f ist die Abbildung $\theta \mapsto f(\theta) \cos(k\theta)$ ebenfalls gerade, und es gilt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\tau) \cos(k\tau) d\tau .$$

Ist f ungerade, so ist $\theta \mapsto f(\theta) \cos(k\theta)$ ebenfalls ungerade, und folglich gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(\tau) \cos(k\tau) d\tau = 0 .$$

Damit kann die Fourierreihen Entwicklung einer ungeraden Funktion als reine Sinus-Entwicklung geschrieben werden:

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\theta) ,$$

wobei

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\tau) \sin(k\tau) d\tau .$$

Um eine Funktion f , die auf dem Intervall $(0, \pi)$ definiert ist, in eine Fourierreihe zu entwickeln, ergänzt man f zu einer Funktion auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$, die wiederum zu einer 2π periodischen Funktion g auf \mathbb{R} ergänzt wird. Diese Funktion kann in eine Fourierreihe entwickelt werden. Durch die Konstruktion stimmen g und f auf $(0, \pi)$ überein. Abhängig von der Art der Fortsetzung als gerade oder ungerade Funktion, besteht die Fourier-Entwicklung aus reinen Kosinus oder Sinus Termen.

3.2 Fourierintegral

Mit der Transformation

$$\begin{aligned} \zeta: (-l, l) &\rightarrow (-\pi, \pi) , \\ t &\mapsto \zeta(t) := \frac{t\pi}{l} \end{aligned}$$

wird eine Funktion f , die auf dem Intervall $(-l, l)$ definiert ist, in eine Funktion, die auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ definiert ist, transformiert. Bezeichnen wir diese Funktion mit

$$g = f \circ \zeta^{-1}$$

und entwickeln wir diese Funktion in eine Fourierreihe, so erhalten wir

$$\begin{aligned} g(s) &= g^r(s) + ig^c(s) \\ &= \frac{a_0^r}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^r \cos(ks) + b_k^r \sin(ks)) \\ &\quad + i \left(\frac{a_0^c}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^c \cos(ks) + b_k^c \sin(ks)) \right), \end{aligned}$$

wobei a_k^r und b_k^r die Fourierkoeffizienten des Realteils von g , d.h. von g^r , und a_k^c , b_k^c die Fourierkoeffizienten des Imaginärteils g^c von g bezeichnen. Rechnen wir zurück auf das ursprüngliche Koordinatensystem, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(t) &= g(\zeta(t)) \\ &= \frac{a_0^r}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^r \cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right) + b_k^r \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right) \right) \\ &\quad + i \left(\frac{a_0^c}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^c \cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right) + b_k^c \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right) \right) \right). \end{aligned}$$

Die Fourierkoeffizienten a_k^r können geschrieben werden als

$$\begin{aligned} a_k^r &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^r(\xi) \cos(k\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l g^r\left(\frac{\pi\tau}{l}\right) \cos\left(\frac{k\pi\tau}{l}\right) \frac{\pi}{l} d\tau \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^r(\tau) \cos\left(\frac{k\pi\tau}{l}\right) d\tau. \end{aligned}$$

Definiert man

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k &:= a_k^r + ia_k^c = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \cos\left(\frac{k\pi\tau}{l}\right) d\tau, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ \tilde{d}_k &:= b_k^r + ib_k^c = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \sin\left(\frac{k\pi\tau}{l}\right) d\tau, & k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{3.10}$$

so kann die Fourierreihe von f umgeschrieben werden zu

$$f(t) = \frac{\tilde{c}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k \cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right) + \tilde{d}_k \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right). \tag{3.11}$$

Beachte, die Summation beginnt mit $k = 1$. Aus (3.10) folgt unter Verwendung der Beziehung, $\cos(t) \cos(\tau) + \sin(t) \sin(\tau) = \cos(t - \tau)$, dass

$$f(t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \cos\left(\frac{k\pi}{l}(\tau - t)\right) d\tau. \quad (3.12)$$

Wir gehen davon aus, dass das Integral $\int_{-l}^l |f(\tau)| d\tau$ endlich ist. Dann gilt

$$\frac{1}{2l} \left| \int_{-l}^l f(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(\tau)| d\tau \leq \frac{c}{2l} \rightarrow 0 \quad \text{für } l \rightarrow \infty.$$

Wir definieren Hilfsvariablen

$$\omega_k := \frac{k\pi}{l}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

und

$$\Delta\omega_k := \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{\pi}{l} \rightarrow 0 \quad \text{für } l \rightarrow \infty.$$

Damit gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \cos\left(\frac{n\pi}{l}(\tau - t)\right) d\tau = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega_{n-1} \int_{-l}^l f(\tau) \cos(\omega_n(\tau - t)) d\tau.$$

Die rechte Seite ist eine Approximation des Doppelintegrals

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega(\tau - t)) d\tau d\omega.$$

Falls zum Beispiel f stetig ist kann man zeigen, dass das Doppelintegral

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega(\tau - t)) d\tau d\omega$$

gegen $f(t)$ konvergiert. Die Identität

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega(\tau - t)) d\tau d\omega$$

nennt man *Fourierintegraldarstellung*.

Das Fourierintegral kann geschrieben werden als

$$f(t) = \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)) d\omega, \quad (3.13)$$

wobei

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \\ b(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ein Vergleich von (3.14) und (3.10) zeigt den Unterschied zwischen der Fourierreihentwicklung und dem Integral. Der diskrete Parameter k in (3.8), (3.7) wird durch den kontinuierlichen Parameter ω in (3.13), (3.14) ersetzt.

3.3 Fouriertransformation

Der Einfachheit nehmen wir an, dass die Funktion f stetig ist. Bei gegebenen t und τ ist die Funktion

$$g(\omega) := f(\tau) \cos(\omega(\tau - t))$$

gerade. Damit ist die Funktion

$$h(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega(\tau - t)) d\tau$$

ebenfalls gerade und das Fourierintegral kann geschrieben werden als

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega(\tau - t)) d\tau d\omega. \quad (3.15)$$

Wir leiten nun eine analoge Integraldarstellung mit einem Sinusterm her. Dazu setzen wir

$$s(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega(\tau - t)) d\tau.$$

Da $s(\omega)$ ungerade ist, folgt, dass

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega(\tau - t)) d\tau d\omega \\ &:= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega(\tau - t)) d\tau d\omega = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Zusammen mit (3.15) folgt dann, dass

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(i\omega(\tau - t)) d\tau d\omega, \quad (3.17)$$

wobei das Integral im Sinn eines Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen ist.

Die rechte Seite von (3.17) kann in zwei Operatoren zerlegt werden:

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

und

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau .$$

Die Operatoren \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} werden *Fouriertransformation* und *inverse Fouriertransformation* genannt. Die beiden Operatoren sind tatsächlich zueinander invers.

Die Operatoren

$$(\mathcal{F}_s f)(\omega) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau$$

und

$$(\mathcal{F}_c f)(\omega) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau$$

heißen *Fouriersinustransformation* und *Fouriercosinustransformation*. Einige Eigenschaften der Operatoren \mathcal{F} , \mathcal{F}_c und \mathcal{F}_s sind hier angeführt:

1. Ist f gerade, dann gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ &= (\mathcal{F}_c f)(\omega) . \end{aligned}$$

2. Ist f ungerade, dann gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \\ &= -i(\mathcal{F}_s f)(\omega) . \end{aligned}$$

3. Jede Funktion f kann als die Summe einer geraden Funktion

$$f_g(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

und einer ungeraden Funktion

$$f_u(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

geschrieben werden. Folglich kann die Fouriertransformation als die Differenz der Fouriercosinustransformation des geraden Anteils und der Fouriersinustransformation des ungeraden Anteils dargestellt werden:

$$\mathcal{F}f = \mathcal{F}_c f_g - i\mathcal{F}_s f_u .$$

Kapitel 4

Euler Gleichungen

In diesem Abschnitt leiten wir grundlegende Gleichungen der Strömungsmechanik aus den Gesetzen der Erhaltung von Masse, Impuls und Energie ab. Die Resultate in diesem Kapitel sind dem Buch von Chorin & Marsden [1] entnommen, in dem auch weiterführende mathematische Überlegungen enthalten sind.

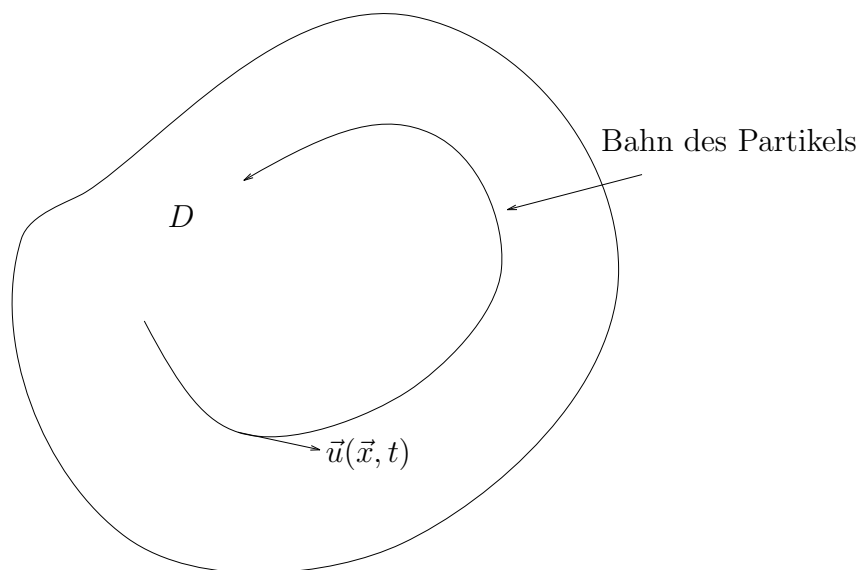


Abbildung 4.1: Bewegung eines Partikels

Im folgenden betrachten wir ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$, welches mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Befindet sich in dieser Flüssigkeit ein kleines mitbewegtes Partikel, so besitzt dieses einen wohldefinierten Pfad. Damit ist auch die Geschwindigkeit $\vec{u}(\vec{x}, t)$ eines Partikels, das sich zur Zeit t am Ort $\vec{x} \in D$ befindet,

wohldefiniert (vgl. Fig. 4.1). Die so konstruierte Funktion $\vec{u}: D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ wird als *Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit* bezeichnet.

Weiters nehmen wir an, dass die Flüssigkeit eine wohldefinierte Dichte $\rho: D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt. Falls W ein Teilgebiet von D ist, dann ist die Masse der Flüssigkeit in W zur Zeit t gegeben durch

$$m(W, t) := \int_W \rho(\vec{x}, t) dV . \quad (4.1)$$

Dabei bezeichnet dV ein Volumenelement in \mathbb{R}^3 .

In den folgenden Überlegungen gehen wir davon aus, dass die Funktionen \vec{u} und ρ hinreichend glatt sind (also genügend oft stetig differenzierbar). Damit können wir Rechenregeln wie den Gaußschen Integralsatz anwenden. Bei makroskopischen Untersuchungen eines Mediums ist diese Annahme meist gerechtfertigt.

Die Ableitung der folgenden Gleichungen basiert auf diesen drei Prinzipien:

Massenerhaltung: Es wird weder Masse vernichtet noch kann Masse entstehen.

Zweites Newtonsches Gesetz: Die Änderungsrate der Momente (Gesamtimpuls) in einem Teil der Flüssigkeit ist gleich der Kraft, die auf diesen Teil wirkt.

Energieerhaltung: Energie wird weder produziert noch vernichtet.

4.1 Massenerhaltung

Sei W ein zusammenhängendes Teilgebiet von D , welches zeitlich stationär ist. Darüber hinaus nehmen wir an, dass W einen zweimal stetig differenzierbaren Rand ∂W hat. Die Änderungsrate der Masse in W pro Zeiteinheit ist gegeben durch

$$\frac{d}{dt} m(W, t) = \frac{d}{dt} \int_W \rho(\vec{x}, t) dV = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) dV .$$

Hier und im folgenden bezeichnet dV ein Volumenelement und dA bezeichnet ein Flächenelement. Weiters bezeichnet $\vec{n}(\vec{x})$ stets die nach außen gerichteten Einheitsnormale zu W bei $\vec{x} \in \partial W$.

Da W zeitlich stationär ist, verändert sich die Masse von W , indem über den Rand ∂W Masse zu- oder abfließt. Um die Rate der Masseänderung zu

bestimmen, stellen wir zunächst fest, dass sich jeder Punkt $\vec{y} \in D$, welcher sich nahe genug am Rand von W befindet, eindeutig in der Form

$$\vec{y} = \vec{x} + \lambda \vec{n}(\vec{x}) \quad \text{mit } \vec{x} \in \partial W \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}$$

schreiben lässt. Für Punkte $\vec{y} \in W$ gilt $\lambda < 0$, für Punkte außerhalb von W dagegen $\lambda > 0$.

Wir betrachten nun jenen Teil der Flüssigkeit, der sich zur Zeit t am Ort $\vec{y} = \vec{x} + \lambda \vec{n}(\vec{x}) \in W$ befindet. In einer kurzen Zeit $\Delta t > 0$, wird \vec{y} durch die Bewegung der Flüssigkeit näherungsweise um $\vec{u}(\vec{x}, t) \Delta t$ verschoben. Damit gilt in erster Näherung, dass im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ alle jene Punkte $\vec{x} + \lambda \vec{n}(\vec{x})$ von W nach $D \setminus W$ transportiert werden, für welche

$$-(\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x})) \Delta t < \lambda < 0.$$

Falls $\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}) > 0$ beträgt der Massenverlust längs der Geraden $\vec{x} + \mathbb{R} \vec{n}(\vec{x})$ daher $\rho(\vec{x}, t) (\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x})) \Delta t$.

In analoger Weise erhält man für $\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}) < 0$ einen Massengewinn von $-\rho(\vec{x}, t) (\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x})) \Delta t$. Die gesamte Massenänderung längs $\vec{x} + \mathbb{R} \vec{n}(\vec{x})$ wird somit in erster Näherung beschreiben durch

$$\Delta m(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}, t) (\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x})) \Delta t, \quad \text{für } \vec{x} \in \partial W.$$

Im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$ ergibt sich $-\rho(\vec{x}, t) (\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}))$ als (exakte) Rate der Masseänderung durch Zu- und Abfluss bei $\vec{x} \in \partial \Omega$.

Massenerhaltung im Gebiet W bedeutet somit

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho(\vec{x}, t) dV = - \int_{\partial W} \rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dA. \quad (4.2)$$

Dabei beschreibt $\frac{d}{dt} \int_W \rho dV$ die zeitliche Änderung der Masse im Gebiet W , während der Term $-\int_{\partial W} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA$ beschreibt, wieviel Masse über den Rand von ∂W pro Zeiteinheit in das Gebiet zu- beziehungsweise abfließt. Unter der Hypothese, dass Masse weder produziert wird noch verlorengelassen, müssen sich beide Terme das Gleichgewicht halten.

Gleichung (4.2) ist die Integraldarstellung der Massenerhaltung. Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes folgt aus (4.2) die Gleichung

$$\int_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) + (\nabla \cdot (\rho \vec{u}))(\vec{x}, t) \right] dV = 0. \quad (4.3)$$

Daraus folgt (*siehe Übungen*), dass im ganzen Gebiet D folgende Gleichung gilt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) + (\nabla \cdot (\rho \vec{u}))(\vec{x}, t) = 0. \quad (4.4)$$

(Hier und im folgenden bezeichnet $(\nabla \cdot)$ die Divergenz eines Vektorfeldes.) Wesentlich für die Herleitung der letzten Formel ist, dass (4.3) für alle (glatten) Gebiete W gilt.

Gleichung (4.4) wird als *stetige Form der Massenerhaltung* bezeichnet. Diese Bezeichnung rührt daher, dass die Differentialgleichung nur dann aus der Integraldarstellung hergeleitet werden kann, wenn ρ und \vec{u} Stetigkeitsvoraussetzungen erfüllen.

4.2 Momentengleichung

Es bezeichne $\vec{\chi}(t) := (x(t), y(t), z(t))$ den Pfad eines bewegten Partikels, und $\vec{u}(\vec{x}, t) = (u(\vec{x}, t), v(\vec{x}, t), w(\vec{x}, t))$ das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit. Das Gesetz *Geschwindigkeit = Weg / Zeit* bedeutet dann, dass

$$\vec{u}(\vec{\chi}(t), t) = \frac{d\vec{\chi}}{dt}(t). \quad (4.5)$$

Der *Beschleunigungsvektor* eines Partikels, definiert als zweite Ableitung des Pfades nach der Zeit, ist somit gegeben durch

$$\vec{a}(t) := \frac{d^2\vec{\chi}}{dt^2}(t) = \frac{d}{dt}\vec{u}(\vec{\chi}(t), t). \quad (4.6)$$

Man beachte hier, dass $\frac{d}{dt}\vec{u}(\vec{\chi}(t), t)$ die Ableitung der Funktion $t \mapsto \vec{u}(\vec{\chi}(t), t)$ bezeichnet und mittels der Kettenregel berechnet werden muss. Im Gegensatz dazu bezeichnet $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{\chi}(t), t)$ die partielle Ableitung nach der letzten Komponente.

Im folgenden werden wir häufig die beiden Operatoren

$$\vec{u} \cdot \nabla := u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.7)$$

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla. \quad (4.8)$$

benützen. Diese werden wir sowohl auf skalarwertige Funktionen $f(\vec{x}, t) = f(x, y, z, t)$ als auch auf vektorwertige Funktionen anwenden. Den Operator $\frac{D}{Dt}$ nennt man die *totale Ableitung*. Ist $f: D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so folgt aus der Kettenregel und (4.5), dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\vec{\chi}(t), t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{\chi}(t), t) + \frac{d\vec{\chi}}{dt}(t) \cdot \nabla f(\vec{\chi}(t), t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{\chi}(t), t) + (\vec{u} \cdot \nabla f)(\vec{\chi}(t), t) = \frac{Df}{Dt}(\vec{\chi}(t), t). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die totale Ableitung berücksichtigt somit die Bewegung der Flüssigkeit und auch, dass sich die Position eines Flüssigkeitspartikels in der Flüssigkeit zeitlich ändert.

Wenden wir (4.9) auf jede Komponente von (4.6) an, so folgt

$$\vec{a}(t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(t) + (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})(\vec{x}, t) = \frac{D\vec{u}}{Dt}(\vec{x}, t), \quad (4.10)$$

als alternative Darstellung Beschleunigungsvektors.

In jedem Kontinuum treten zwei verschiedene Arten von Kräften auf:

- *Spannungen*, die über die Oberfläche des Materials an das Innere weitergeleitet werden.
- *Äußere Kräfte*, wie etwa Gravitation, die auf das Kontinuum ausgeübt werden.

Je nach Beschaffenheit des Kontinuums gibt es verschiedene Möglichkeiten, wie Spannungen hervorgerufen werden können. Wir beschränken uns im folgenden auf *ideale Flüssigkeiten*:

Definition 4.1. Eine Flüssigkeit heißt ideal, wenn eine Funktion p , genannt *Druck*, existiert, sodass für jedes Gebiet W in D gilt:

Die Kraft, die auf ∂W pro Einheitsfläche wirkt, ist gleich $-p(\vec{x}, t)\vec{n}(\vec{x})$.

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass der Normalvektor aus W hinauszeigt, die Kraft aber auf dieses Gebiet einwirkt. ■

In einer idealen Flüssigkeit wirken die Kräfte orthogonal zur Oberfläche S und es treten keine tangentialen Kräfte auf. Dies zeigt, dass die Annahme einer idealen Flüssigkeiten eine sehr spezielle ist. Viele interessante physikalische Phänomene können mit idealen Flüssigkeiten nicht erklärt werden. Trotzdem beschränken wir uns im folgenden der Einfachheit halber auf ideale Flüssigkeiten.

Sei W ein Gebiet in der Flüssigkeit zu einer vorgegebenen Zeit t . Die gesamte Kraft, die von der Umgebung auf die Flüssigkeit in W wirkt, ist gegeben durch

$$\vec{S}_{\partial W}(t) = \text{Kraft, die auf } \partial W \text{ wirkt} = - \int_{\partial W} p(\vec{x}, t)\vec{n}(\vec{x}) dA. \quad (4.11)$$

Ist \vec{e} ein konstanter Vektor, dann folgt aus dem Gaußschen Integralsatz

$$\begin{aligned}\vec{e} \cdot \vec{S}_{\partial W}(t) &= - \int_{\partial W} (p(\vec{x}, t)\vec{e}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dA = - \int_W \nabla \cdot (p\vec{e})(\vec{x}, t) dV \\ &= - \int_W (\nabla p(\vec{x}, t) \cdot \vec{e}) dV = - \vec{e} \cdot \int_W \nabla p(\vec{x}, t) dV.\end{aligned}$$

(Hier um im folgenden bezeichnet ∇ den Gradienten.) Daraus folgt (man beachte, \vec{e} war beliebig), dass

$$\vec{S}_{\partial W}(t) = - \int_W \nabla p(\vec{x}, t) dV. \quad (4.12)$$

Außer Spannungenkräften können in einer idealen Flüssigkeit auch Körperkräfte auftreten. Bezeichnet $\vec{b}(\vec{x}, t)$ die *Körperkraft pro Einheitsmasse*, dann ist die Summe der Körperkräfte in W gegeben durch

$$\vec{B}_W(t) = \int_W \rho(\vec{x}, t)\vec{b}(\vec{x}, t) dV. \quad (4.13)$$

Jedes Flüssigkeitsteilchen ist somit einer Kraft ausgesetzt, die sich aus Spannungenkräften und Körperkräften zusammensetzt:

$$\text{Kraft pro Einheitsvolumen} = -\nabla p + \rho\vec{b}. \quad (4.14)$$

Mit dem zweiten Newtonschen Gesetz (Masse \times Beschleunigung = Kraft) folgt aus (4.14) und (4.10) die *Momentengleichung*

$$\rho(\vec{x}, t)\frac{D\vec{u}}{Dt}(\vec{x}, t) = -\nabla p(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}, t)\vec{b}(\vec{x}, t). \quad (4.15)$$

Eine etwas kompliziertere Form der Momentengleichung ist die Navier–Stokes Gleichung, die zusätzlich *dynamisch viskose* Anteile enthält:

$$\rho(\vec{x}, t)\frac{D\vec{u}}{Dt}(\vec{x}, t) = -\nabla p(\vec{x}, t) + \eta\Delta\vec{u}(\vec{x}, t) + (\lambda + \eta)\nabla(\nabla \cdot \vec{u})(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}, t)\vec{b}(\vec{x}, t). \quad (4.16)$$

Dabei bezeichnet $\Delta := (\nabla \cdot \nabla) = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ den Laplace Operator.

Integraldarstellung

Im folgenden leiten wir aus Gleichung (4.15) eine Integraldarstellung der Momentengleichung ab. Die Definition der totalen Ableitung und Gleichung (4.15) implizieren

$$\rho(\vec{x}, t) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t) = -\rho(\vec{x}, t) (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}(\vec{x}, t) - \nabla p(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t). \quad (4.17)$$

Nach der Produktregel gilt $\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} = \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$. Die Massenerhaltung (4.4) und Gleichung (4.17) implizieren somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t}(\vec{x}, t) &= -((\nabla \cdot (\rho \vec{u}))(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}, t) (\vec{u} \cdot \nabla)) \vec{u}(\vec{x}, t) \\ &\quad - \nabla p(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ist \vec{e} ein konstanter Vektor, so gilt

$$((\nabla \cdot (\rho \vec{u}))(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}, t) (\vec{u} \cdot \nabla)) (\vec{u} \cdot \vec{e})(\vec{x}, t) = (\nabla \cdot (\rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{e}))) (\vec{x}, t).$$

Somit folgt aus (4.18) die Gleichung

$$\vec{e} \cdot \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t}(\vec{x}, t) = -(\nabla \cdot (p \vec{e} + \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{e}))) (\vec{x}, t) + \vec{e} \cdot \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t). \quad (4.19)$$

Aus (4.19) folgt mit dem Gaußschen Integralsatz, dass für ein Gebiet W mit glattem Rand die Änderung der Momente in Richtung \vec{e} gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot \int_W \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t}(\vec{x}, t) dV \\ &= - \int_{\partial W} (p \vec{e} + \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{e}))(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} dA + \vec{e} \cdot \int_W \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t) dV \\ &= - \vec{e} \cdot \int_{\partial W} (p \vec{n} + \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}))(\vec{x}, t) dA + \vec{e} \cdot \int_W \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t) dV. \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle Richtungen \vec{e} gültig ist, folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_W \rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) dV \\ &= - \int_{\partial W} (p \vec{n} + \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}))(\vec{x}, t) dA + \int_W \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t) dV. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Diese Gleichung ist die *Integralform der Momentengleichung*. Die Größe

$$(p \vec{n} + \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}))(\vec{x}, t)$$

heißt *Momentenfluss pro Einheitsfläche* über ∂W .

4.3 Energieerhaltung

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir die Gleichungen für die Massenerhaltung (4.4) und die Momentengleichung (4.15) hergeleitet. Gleichung (4.15) ist in Vektorform und besteht aus 3 skalaren Gleichungen. Insgesamt haben wir also 4 skalare Gleichungen, aber 5 unbekannte skalare Funktionen \vec{u} , ρ und p . Dieses einfache Zählen der Unbekannten und Gleichungen legt nahe, dass zur vollständigen Beschreibung der Bewegung in der Flüssigkeit eine zusätzliche Gleichung benötigt wird. Eine solche Gleichung folgt aus der Energieerhaltung.

Wir nehmen an, dass die Energie in jedem Teilgebiet $W \subset D$ der Flüssigkeit geschrieben werden kann als

$$E_{\text{total}}(W, t) = E_{\text{kinetisch}}(W, t) + E_{\text{inner}}(W, t). \quad (4.21)$$

Dabei bezeichnet

$$E_{\text{kinetisch}}(W, t) := \frac{1}{2} \int_W \rho(\vec{x}, t) \|\vec{u}(\vec{x}, t)\|^2 dV. \quad (4.22)$$

die *kinetische Energie* und $E_{\text{inner}}(W, t)$ die *innere Energie* der Flüssigkeit. Die kinetische Energie beschreibt die Bewegungsenergie aller Flüssigkeitsteilchen auf einer makroskopischen Skala. Die innere Energie hingegen ist auf einer makroskopischen Skala “unsichtbar” und rührt beispielsweise von (makroskopisch unsichtbaren) Molekülschwingungen her.

Es bezeichne $\vec{\phi}(\vec{x}, t)$ den Pfad eines Partikels, welches sich zur Zeit $t = 0$ am Ort \vec{x} befindet. Die Funktion $\vec{\phi}$ heißt *Strömungsabbildung*. Weiters bezeichnen wir mit $W_t := \vec{\phi}(W, t)$ den Teil der Flüssigkeit der sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in W befunden hat.

Die *integrale Form der Energieerhaltung* lautet

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} E_{\text{kinetisch}}(W_t, t) + \frac{d}{dt} E_{\text{inner}}(W_t, t) \\ &= \int_{W_t} \rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{b}(\vec{x}, t) dV - \int_{\partial W_t} p(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dA. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dabei bezeichnen $\int_{W_t} \rho \vec{u} \cdot \vec{b} dV$ und $-\int_{\partial W_t} p \vec{u} \cdot \vec{n} dA$ die Raten der von den Körperkräften und den Spannungskräften am Gebiet W_t verrichteten Arbeit.

Im folgenden leiten wir eine Gleichung für die Änderung der kinetischen Energie ab. Zunächst zeigen wir für eine allgemeine (genügend glatte) Funktion f die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho(\vec{x}, t) f(\vec{x}, t) dV = \int_{W_t} \rho(\vec{x}, t) \frac{Df}{Dt}(\vec{x}, t) dV.$$

Dazu bemerken wir zuerst, dass $\frac{d}{dt}\vec{\phi} = \vec{u}$ gilt, was bedeutet, dass die Änderung des Ortes die Geschwindigkeit ist. Jetzt führen wir einige elementare Umformungen durch. Wegen $W_t = \vec{\phi}(W, t)$ gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} (\rho f)(\vec{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_W (\rho f)(\vec{\phi}(\vec{x}, t), t) J(\vec{x}, t) dV,$$

wobei

$$J(\vec{x}, t) := |\det \nabla \vec{\phi}(\vec{x}, t)|$$

ist. Da in obiger Gleichung auf der rechten Seite das Integral nicht mehr von W_t abhängt, kann man Differentiation und Integration vertauschen, und es gilt

$$\frac{d}{dt} \int_W (\rho f)(\vec{\phi}(\vec{x}, t), t) J(\vec{x}, t) dV = \int_W \frac{d}{dt} [(\rho f)(\vec{\phi}(\vec{x}, t), t) J(\vec{x}, t)] dV.$$

Die Differentiation im Integral wird mit der Produktregel ausgewertet. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(\rho f)(\vec{\phi}(\vec{x}, t), t) J(\vec{x}, t)] \\ = \frac{d}{dt} [(\rho f)(\vec{\phi}(\vec{x}, t), t)] J(\vec{x}, t) + (\rho f)(\vec{\phi}(\vec{x}, t), t) \frac{d}{dt} J(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

Laut (4.9) ist der erste Ableitungsterm gegeben durch

$$\frac{d}{dt} [(\rho f)(\vec{\phi}(\vec{x}, t), t)] = \frac{D(\rho f)}{Dt}(\vec{\phi}(\vec{x}, t), t).$$

Außerdem gilt (*Beweis siehe Übungen*)

$$\frac{d}{dt} J(\vec{x}, t) = J(\vec{x}, t) (\nabla \cdot \vec{u})(\vec{\phi}(\vec{x}, t), t).$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho f dV &= \int_W \left[\frac{D(\rho f)}{Dt}(\vec{\phi}(\vec{x}, t), t) + (\rho f)(\nabla \cdot \vec{u})(\vec{\phi}(\vec{x}, t), t) \right] J(\vec{x}, t) dV \\ &= \int_{W_t} \left[\frac{D(\rho f)}{Dt}(\vec{x}, t) + (\rho f)(\vec{x}, t) (\nabla \cdot \vec{u})(\vec{x}, t) \right] dV. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Verwenden wir noch die Massenerhaltung

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \vec{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot (\rho \vec{u})) = 0,$$

so folgt die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho(\vec{x}, t) f(\vec{x}, t) dV = \int_{W_t} \rho(\vec{x}, t) \frac{Df}{Dt}(\vec{x}, t) dV. \quad (4.25)$$

Aus (4.25) und der Formel (*Beweis siehe Übungen*)

$$\frac{1}{2} \frac{D \|\vec{u}\|^2}{Dt} = \vec{u} \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right)$$

folgt mit $f = \|\vec{u}\|^2$, dass die Änderung der kinetischen Energie eines Partikels in einem sich bewegenden Teil der Flüssigkeit gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{\text{kinetisch}}(W_t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{W_t} \rho(\vec{x}, t) \|\vec{u}(\vec{x}, t)\|^2 dV \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{W_t} \rho(\vec{x}, t) \frac{D \|\vec{u}\|^2}{Dt}(\vec{x}, t) dV \\ &= \int_{W_t} \rho(\vec{x}, t) \left[\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t) + \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla \vec{u}(\vec{x}, t) \right) \right] dV. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Um aus (4.23) eine differentielle Form der Energieerhaltung abzuleiten, benötigt man Kenntnis über die inner Energie E_{inner} . Der Einfachheit halber werden wir eine differentielle Form nur für den Fall herleiten, dass die innere Energie E_{inner} konstant ist.

Nehmen wir nun an, dass die innere Energie der Flüssigkeit konstant bleibt, so folgt aus den Gleichungen (4.23) und (4.26) sowie dem Gaußschen Integralsatz, dass

$$\begin{aligned} \int_{W_t} \rho(\vec{x}, t) \left[\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t) + \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla \vec{u}(\vec{x}, t) \right) \right] dV \\ = \int_{W_t} \rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{b}(\vec{x}, t) dV - \int_{W_t} (\nabla \cdot (p\vec{u}))(\vec{x}, t) dV. \end{aligned}$$

Da das bewegte Gebiet W_t beliebig ist, folgt daraus

$$\rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \frac{D\vec{u}}{Dt}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{b}(\vec{x}, t) - (\nabla \cdot (p\vec{u}))(\vec{x}, t). \quad (4.27)$$

Dies ist die differentielle Form der Energieerhaltung unter der Annahme einer konstanten inneren Energie, also $\frac{d}{dt} E_{\text{inner}} = 0$.

Inkompressible Flüssigkeiten

Ein Flüssigkeit heißt inkompressibel, falls für jedes bewegte Gebiet W_t und für alle Zeiten $t > 0$, gilt, dass

$$\text{Vol}(W_t) := \int_{W_t} dV = \text{konstant} .$$

Aus (4.24) mit $f = 1/\rho$ folgt dann, dass

$$(\nabla \cdot \vec{u})(\vec{x}, t) = 0 . \quad (4.28)$$

Damit erhält man die Euler-Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt}(\vec{x}, t) &= 0 , \\ \rho(\vec{x}, t) \frac{D\vec{u}}{Dt}(\vec{x}, t) &= -\nabla p(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}, t)\vec{b}(\vec{x}, t) , \\ (\nabla \cdot \vec{u})(\vec{x}, t) &= 0 . \end{aligned} \quad (4.29)$$

mit Randbedingungen $\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}, t) = 0$ auf ∂D .

Aus den Euler-Gleichungen (4.29) einer inkompressiblen Flüssigkeit folgt insbesondere, dass auch Gleichung (4.27) erfüllt ist. Eine inkompressible Flüssigkeit hat demnach konstante innere Energie.

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass die Momentengleichung (4.15) und die Energieerhaltung (4.27) bereits $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ implizieren. Konstante innere Energie impliziert somit Inkompressibilität. Dies zeigt aber auch, dass zum Studium *kompressibler Flüssigkeiten* ($\nabla \cdot \vec{u} \neq 0$) die innere Energie berücksichtigt werden muss. Dies erfordert allerdings Kenntnisse über Thermodynamik und geht über das Ziel dieser Vorlesung hinaus.

4.4 Linearisierung

In diesem Abschnitt, der auf dem Buch von Colton & Kress [2] basiert, studieren wir Linearisierung als ein Mittel der Modellbildung. Wir treffen die Modellannahme, dass die zu beschreibende Schallwelle eine *kleine* Amplitude besitzt (nur dann ist Linearisierung gerechtfertigt) und sich in einem homogenen, isotropen Material ausbreitet. Ein Material heißt *homogen*, falls die chemische Zusammensetzung und die Dichte in jedem Ort des Materials gleich ist. Ein Material wird *isotrop* genannt, falls die Ausbreitung von Schallwellen keine Richtung bevorzugt.

Setzen wir weiters voraus, dass keine Körperkräfte auftreten, also $\vec{b} = 0$ ist, dann reduzieren sich die Massenerhaltung (4.4) und die Momentengleichung (4.15) zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) + (\nabla \cdot (\rho \vec{u}))(\vec{x}, t) &= 0, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t) + (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})(\vec{x}, t) + \frac{1}{\rho(\vec{x}, t)} \nabla p(\vec{x}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Wie in der Herleitung der Massenerhaltung und die Momentengleichung bezeichnet \vec{u} das Geschwindigkeitsfeld, p den Druck und ρ die Dichte der Flüssigkeit.

Jetzt nehmen wir an, dass der Druck ausschließlich abhängig ist von der Dichte ρ und der *spezifischen Entropie* S , also

$$p(\vec{x}, t) = f(\rho(\vec{x}, t), S(\vec{x}, t)),$$

beziehungsweise

$$\frac{d}{dt} [p(\vec{x}, t) - f(\rho(\vec{x}, t), S(\vec{x}, t))] = 0. \quad (4.31)$$

Dies ist ein typisches Beispiel einer funktionalen Abhängigkeit, wie wir sie bereits in Kapitel 2.3 studiert haben. Die Entropie ist ein quantitatives Maß für die Unordnung, welches unter gewissen Voraussetzungen die folgende Differentialgleichung erfüllt (siehe Übungen):

$$\frac{DS}{Dt}(\vec{x}, t) = \frac{\partial S}{\partial t}(\vec{x}, t) + (\vec{u} \cdot \nabla S)(\vec{x}, t) = 0.$$

In den folgenden Untersuchungen nehmen wir zusätzlich an, dass \vec{u} , p , ρ und S kleine Störungen des *statischen* Falls sind, d.h., wir können die Lösung der Euler-Gleichungen (4.30) schreiben als

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}, t) &= \vec{u}_0 + \epsilon \hat{u}(\vec{x}, t), \\ p(\vec{x}, t) &= p_0 + \epsilon \hat{p}(\vec{x}, t), \\ \rho(\vec{x}, t) &= \rho_0 + \epsilon \hat{\rho}(\vec{x}, t), \\ S(\vec{x}, t) &= S_0 + \epsilon \hat{S}(\vec{x}, t), \end{aligned}$$

wobei $\epsilon > 0$ ein kleiner Parameter ist und

$$\vec{u}_0 = 0, \quad p_0 = \text{konst}, \quad \rho_0 = \text{konst}, \quad S_0 = \text{konst}.$$

Wegen der Voraussetzung, dass wir kleine Störungen des stationären Falls betrachten, interessieren uns die Gleichungen für \hat{u} , \hat{p} , $\hat{\rho}$ und \hat{S} für kleine

Parameter ϵ . Da die konstanten Funktionen \vec{u}_0 , p_0 , ρ_0 und S_0 eine Lösung der Euler-Gleichungen (4.30) mit trivialen Anfangs- und Randbedingungen darstellen, können wir gute Näherungen erhalten, wenn wir die Differenz der Gleichungen für \vec{u} , p , ρ und S und der Gleichungen für \vec{u}_0 , p_0 , ρ_0 und S_0 betrachten, durch ϵ dividieren und den Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ bestimmen.

Für die einzelnen Terme der Momentengleichung erhalten wir dabei

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\partial(\vec{u}_0 + \epsilon \hat{\vec{u}})}{\partial t} - \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial t} \right] &= \frac{\partial \hat{\vec{u}}}{\partial t}, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\epsilon \hat{\vec{u}} \cdot \nabla(\epsilon \hat{\vec{u}}) - 0 \right] &= 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\nabla(p_0 + \epsilon \hat{p})}{\rho_0 + \epsilon \hat{\rho}} - \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \right] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[\left(\frac{1}{\rho_0 + \epsilon \hat{\rho}} - \frac{1}{\rho_0} \right) \nabla p_0 + \frac{1}{\rho_0 + \epsilon \hat{\rho}} \nabla \hat{p} \right] \\ &= \frac{1}{\rho_0} \nabla \hat{p}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die *linearisierte Momentengleichung*

$$\frac{\partial \hat{\vec{u}}}{\partial t}(\vec{x}, t) + \frac{1}{\rho_0} \nabla \hat{p}(\vec{x}, t) = 0. \quad (4.32)$$

Analog kann man die Massenerhaltung linearisieren und erhält (*Beweis siehe Übungen*)

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(\vec{x}, t) + \rho_0 \left(\nabla \cdot \hat{\vec{u}} \right) (\vec{x}, t) = 0. \quad (4.33)$$

Die *linearisierte Zustandsgleichung*, also die Linearisierung von (4.31), ist gegeben durch

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t}(\vec{x}, t) = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0) \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t).$$

Durch Differentiation der Zustandsgleichung nach der Zeit und Einsetzen von (4.32) und (4.33) folgt,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2}(\vec{x}, t) &= \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0) \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial t^2}(\vec{x}, t) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0) \rho_0 \left(\nabla \cdot \frac{\partial \hat{\vec{u}}}{\partial t} \right) (\vec{x}, t) = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0) \Delta \hat{p}(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

Definieren wir die *Schallgeschwindigkeit* c durch

$$c^2 := \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0),$$

so erhalten wir schließlich die *Wellengleichung*

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2}(\vec{x}, t) = \Delta \hat{p}(\vec{x}, t) . \quad (4.34)$$

Durch Integration von \hat{p} bezüglich der Zeit t sieht man, dass ein Geschwindigkeitspotential $U(\vec{x}, t)$ existiert, sodass

$$\hat{p}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial U}{\partial t}(\vec{x}, t)$$

(U ist eine reellwertige Funktion). Aus der linearisierten Momentengleichung (4.32) folgt somit

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\rho_0} \nabla U(\vec{x}, t) .$$

Das Geschwindigkeitspotential genügt ebenfalls der Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(\vec{x}, t) = \Delta U(\vec{x}, t) .$$

Für *zeitharmonische Wellen* der Gestalt

$$U(\vec{x}, t) = \operatorname{Re}(u(\vec{x}) \exp(i\omega t))$$

mit Frequenz $\omega > 0$, kann man nun leicht ableiten (*siehe Übungen*), dass u der *Helmholtzgleichung* (reduzierte Wellengleichung) genügt:

$$\Delta u(\vec{x}) + k^2 u(\vec{x}) = 0 .$$

Kapitel 5

Diffusionsgleichungen

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels folgen wir Lin & Segel [4] und Segel [5]. Der zweite Abschnitt beruht auf Tayler [6].

5.1 Wärmeleitungsgleichung

In diesem Abschnitt leiten wir die Wärmeleitungsgleichung zunächst in einer und dann in drei räumlichen Dimensionen her.

Wir untersuchen zunächst die Wärmeleitung in einem (Draht-)seil, welches an beiden Enden in Flüssigkeiten fixiert ist. Die Temperaturen der beiden Flüssigkeiten an den Enden sind unterschiedlich, nämlich T_1 und T_2 . Weiters vernachlässigen wir Wärmeverluste über die Seiloberfläche. Schließlich nehmen wir an die Enden des Drahtseils befinden sich bei $x_1 = 0$ und $x_2 = L$.

Metall ist ein sehr guter Wärmeleiter. Daher befindet sich das Seil relativ rasch in einem thermalen *Gleichgewichtszustand*, bei welchem sich die Temperatur zeitlich nicht mehr verändert. Wir wollen zunächst diesen Gleichgewichtszustand betrachten.

Ist das Seil homogen, so besitzt die Temperatur im Gleichgewichtszustand einen konstanten Gradienten. Für die Temperatur T_s im Seil gilt

$$T_s(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L} \quad \text{für } x \in (x_1, x_2) . \quad (5.1)$$

Dabei deuten wir mit dem Subskript bei T_s den stationären Fall an. Der Temperaturgradient ist somit gegeben durch

$$\frac{\partial T_s}{\partial x} = (T_2 - T_1) \frac{1}{L} . \quad (5.2)$$

Die *Wärmeflußdichte* J (der Wärmefluß pro Einheitsfläche pro Einheitszeit, in der Richtung x) ist proportional zum Temperaturgradienten:

$$J = -k \frac{\partial T_s}{\partial x} . \quad (5.3)$$

Dabei ist die *Wärmeleitfähigkeit* k eine positive Materialkonstante. Deshalb muss in (5.3) ein negatives Vorzeichen eingeführt werden, damit gewährleistet ist, dass der Wärmefluss in Richtung sinkender Temperaturen stattfindet.

Die einfachen Überlegungen lassen sich auf komplexere Modelle verallgemeinern: Wir betrachten im folgenden die Temperaturverteilung in einem Seil, bevor der Gleichgewichtszustand erreicht ist. Außerdem erlauben wir jetzt, dass die Wärmeleitfähigkeit $k = k(x)$ von der Position im Seil abhängt.

Es bezeichne $T(x, t)$ die Temperatur im Ort x zur Zeit t . Wir nehmen an, dass (5.3) auf jedem infinitesimalen Stück des Seils gilt, sodass

$$J(x, t) = -k(x) \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) , \quad (5.4)$$

die Wärmefußdichte an der Stelle x zur Zeit t ist. Wir betrachten nun ein zylindrisches Stück des Seils zwischen x und $x + \Delta x$. Der Wärmefluss über die Zylindergrundfläche A an der Stelle x ist dann gegeben durch

$$A \left(-k(x) \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right) . \quad (5.5)$$

Der Wärmefluss über die Zylinderfläche an der Stelle $x + \Delta x$ ist von der gleichen Form wie in (5.5). Da wir den Wärmeaustausch zwischen Seil und Umgebung vernachlässigen, ist der Wärmefluss $\frac{\partial q}{\partial t}$ über die gesamte Zylinderoberfläche gegeben durch

$$\frac{\partial q}{\partial t}(x, t) = A \left(k(x + \Delta x) \frac{\partial T}{\partial x}(x + \Delta x, t) - k(x) \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right) . \quad (5.6)$$

Falls keine externen Wärmequellen oder Verbraucher berücksichtigt werden, dann beschreibt $\frac{\partial q}{\partial t}$ die gesamte Änderung thermischer Energie im zylindrischen Stück zwischen x und $x + \Delta x$.

Wir nehmen nun an, dass die Änderung thermaler Energie proportional zur Änderung der Temperatur ist. Das bedeutet, dass

$$\frac{\partial q}{\partial t}(x, t) = c(x) \rho(x) A \Delta x \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) . \quad (5.7)$$

Dabei ist $\rho A \Delta x$ die Masse des Zylinders und c die (spezifische) Wärmekapazität. Gleichung (5.7) besagt, dass in einer Einheitsmasse ein Anstieg um eine

Temperatureinheit zu einem Anstieg der thermaler Energie um c Einheiten führt. Betrachtet man in (5.6) und (5.7) den Grenzwert $\Delta x \rightarrow 0$, so erhält man

$$\rho(x)c(x) \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right). \quad (5.8)$$

Gleichung (5.8) ist die *eindimensionale Wärmeleitungsgleichung*.

Im Fall eines homogenen Materials, also bei konstanten ρ , c und k , kann (5.8) geschrieben werden als

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \mathcal{K} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t). \quad (5.9)$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{K} = k/(\rho c)$ den *thermischen Diffusionskoeffizienten*. Typische Werte von \mathcal{K} sind $1.14 \text{ cm}^2/\text{s}$ für Kupfer und $0.011 \text{ cm}^2/\text{s}$ für Granit.

Wir beschäftigen uns nun mit der Wärmeleitung im dreidimensionalen Raum. Es bezeichne $T(\vec{x}, t)$ die Temperatur am Ort $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ zur Zeit $t \in \mathbb{R}$. Wir werden zeigen, dass im Fall eines homogenen Mediums die Temperatur T der Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\vec{x}, t) = \mathcal{K} \Delta T(\vec{x}, t) \quad (5.10)$$

genügt. Für ein inhomogenes Medium erfüllt die Temperatur die Differentialgleichung

$$\rho(\vec{x})c(\vec{x}) \frac{\partial T}{\partial t}(\vec{x}, t) = (\nabla \cdot (k \nabla T))(\vec{x}, t). \quad (5.11)$$

Dabei bezeichnen, wie im letzten Kapitel, ∇ den Gradienten, $(\nabla \cdot)$ die Divergenz und Δ den Laplace Operator.

Um (5.10) und (5.11) herzuleiten, gehen wir ähnlich vor wie zur Herleitung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung. Eine Argumentation wie im eindimensionalen Fall liefert die Integralbeziehung

$$\frac{d}{dt} \int_W c(\vec{x})\rho(x)T(\vec{x}, t) dV = \int_{\partial W} k(\vec{x}) \frac{\partial T}{\partial n}(\vec{x}) dA, \quad (5.12)$$

wobei W ein beliebiges Gebiet mit genügend glattem Rand ∂W ist. Diese Beziehung beruht auf der Tatsache, dass der Wärmefluss über ein Element der Oberfläche ∂W in die Richtung $\vec{n}(\vec{x})$, dem Normalenvektors des Gebietes W , gleich $k(x) \frac{\partial T}{\partial n}(\vec{x})$ ist. Man beachte, dass diese Gleichung auch aus der Massenerhaltungsgleichung (4.2) folgt, wenn man eine Temperaturerhaltung voraussetzt und überdies annimmt, dass die Temperatur proportional zum Temperaturgradienten ist.

Aus dem Gaußschen Integralsatz und Gleichung (5.12) folgt, dass

$$\int_W \left(c(x)\rho(x) \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) - (\nabla \cdot (k\nabla T))(\vec{x}, t) \right) dV = 0. \quad (5.13)$$

Da diese Gleichung für beliebige Gebiete W gilt, verschwindet der Integrand von (5.13). Also gilt die *Wärmeleitungsgleichung*

$$c(x)\rho(x) \frac{\partial T}{\partial t}(\vec{x}, t) - (\nabla \cdot (k\nabla T))(\vec{x}, t) = 0. \quad (5.14)$$

Die Lösung von (5.14) allein ist nicht eindeutig. Zusätzlich müssen Randdaten der Temperatur T vorgeschrieben werden, um eine eindeutig Lösung von (5.14) zu gewährleisten. Es gibt je nach Experiment bei Wärmeleitungsmodellen verschiedene Möglichkeiten:

1. Die Temperatur ist am Rand des zu untersuchenden Gebietes zu jeder Zeit vorgeschrieben (Dirichlet-Randdaten). Das ist in unserem eindimensionalen Beispiel der Fall, da die Temperatur an den beiden Enden konstant gehalten wird.
2. Der Rand ist isoliert, sodass am Rand $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ gilt (homogene Neumann-Randdaten).
3. Der Wärmeverlust am Rand ist proportional zur Differenz der Oberflächentemperatur des Materials und der Außentemperatur T_0 , also

$$k(\vec{x}) \frac{\partial T}{\partial n}(\vec{x}, t) = a (T(\vec{x}, t) - T_0).$$

Dies ist etwa der Fall, wenn Wärmeaustausch durch Konvektion stattfindet.

4. Wärmetransport durch Strahlung am Rand. In diesem Fall ist

$$k(\vec{x}) \frac{\partial T}{\partial n}(\vec{x}, t) = \sigma (T(\vec{x}, t)^4 - T_0^4).$$

5.2 Schadstoffausbreitung

Eine Mischung aus Gasen und Partikeln (Rauch) diffundiert aus einem hohen Schornstein der Höhe h und wird durch den Wind verfrachtet. Es soll ein Modell entwickelt werden, mit dem die Luftverschmutzung (insbesondere in Bodennähe) simuliert werden kann, die durch den Schadstoffausstoß aus dem Schornstein hervorgerufen wird. Bei der Modellbildung sind folgende spezifischen Umstände zu berücksichtigen:

1. In der Atmosphäre existiert eine Inversionsluftschicht bei einer Höhe d , durch welche keine Schadstoffe nach oben transportiert werden können.
2. Am Boden wird Rauch mit einer Rate λ abgelagert. Die Rate hängt von der Bodenbeschaffenheit und der lokalen Schadstoffbelastung ab. Wir nehmen an, dass diese Rate empirisch bestimmt werden kann.
3. Der Effekt der Gravitation kann bei der Modellierung vernachlässigt werden, weil die Windgeschwindigkeit an der Spitze des Schornsteins relativ hoch ist.

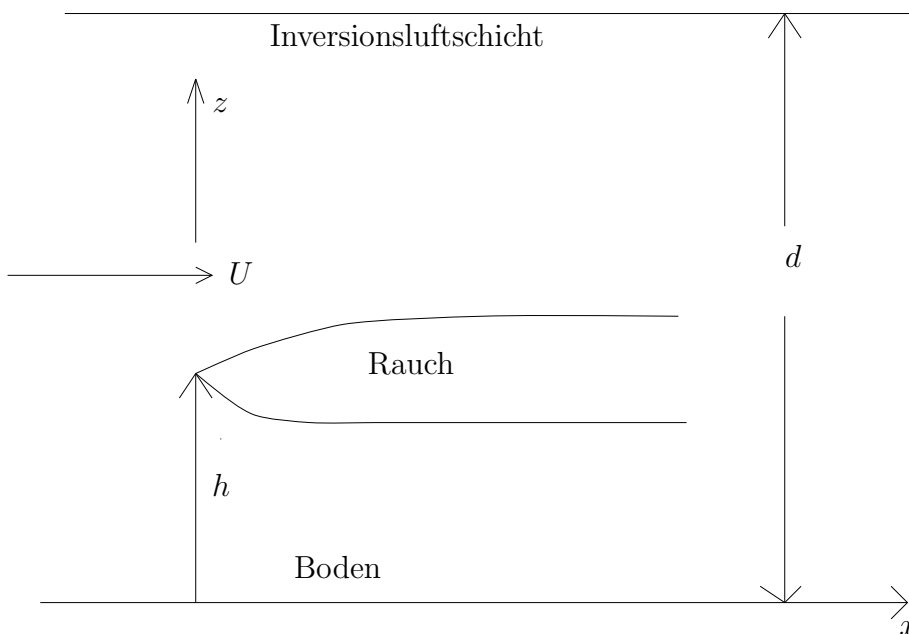


Abbildung 5.1: Schadstoffverbreitung

Wir nehmen an, dass der Wind mit der Geschwindigkeit U gleichmäßig in Richtung x weht und der Diffusionskoeffizient D nur in der Höhe z variiert, also unabhängig von den beiden Ortsvariablen x und y ist. Im Gleichgewichtszustand lautet dann die Konvektions-Diffusionsgleichung für die Schadstoffkonzentration c

$$U \frac{\partial c}{\partial x}(x, y, z) = \nabla \cdot (D(z) \nabla c(x, y, z)) . \quad (5.15)$$

Diese Gleichung lässt sich wie folgt herleiten: Wir verwenden (4.2) und nehmen Schadstofferhaltung an. Nehmen wir für W ein Rechteck in Achsenlage, so haben wir in z -Richtung Diffusion, d.h., die Schadstoffausbreitung ist proportional zur Schadstoffdifferenz. Darüberhinaus entspricht die Dichte bei der

Massenerhaltung dem Schadstoffdiffusionskoeffizienten. In x -Richtung haben eine Strömung mit konstanter Geschwindigkeit U . In der Notation von (4.2) gilt $\rho = 1$ und $\vec{u} \cdot \vec{n} = \pm U$ an den linken und rechten Rändern des Gebietes.

Wir nehmen an, dass die Konzentration der Schadstoffe bei $x = \infty$ verschwindet und betrachten die effektive Konzentration für fixe Höhe z :

$$\bar{c}(x, z) := \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y, z) dy .$$

Durch Integration erhalten wir aus (5.15) die folgende Differentialgleichung für \bar{c} :

$$U \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}(x, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(z) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}(x, z) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D(z) \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}(x, z) \right) . \quad (5.16)$$

Die Funktion \bar{c} genügt folgenden Randbedingungen:

- Am Boden, also für $z = 0$, werden die Schadstoffe mit einer Rate λ abgelagert, also gilt

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial z}(x, 0) = \bar{\lambda}(x, 0) := - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(x, y, c(x, y, 0)) dy .$$

- An der Inversionsschicht ($z = d$) werden keine Schadstoffe transportiert, also

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial z}(x, d) = 0 .$$

- Nur an der Spitze des Schlot (bei $x = 0$ und $z = h$) werden Schadstoffe ausgestoßen. Dies kann man mathematisch durch die Delta-Distribution δ beschreiben und erhält

$$\bar{c}(0, z) = Q \frac{\delta(z - h)}{U(h)} .$$

Dabei beschreibt Q die Stärke der Quelle, also wie viele Schadstoffe aus dem Rauchfang emittiert werden. Der Einfachheit wegen ist diese Stärke um den Faktor $U(h)$ skaliert. Diese Skalierung besagt, dass bei geringer Windgeschwindigkeit $U(h)$ die Schadstoffkonzentration an der Spitze des Schlot hoch ist, während sie bei geringer Geschwindigkeit niedrig ist.

- Die Schadstoffkonzentration verschwindet im Unendlichen, also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{c}(x, z) = 0 .$$

Unter der zusätzlichen Annahme, dass c als Funktion von y bei fixer Höhe und fixer Ortsvariable x normalverteilt ist, kann c aus \bar{c} bestimmt werden über die Beziehung

$$c(x, y, z) = \frac{\bar{c}(x, z)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/\sigma^2),$$

wobei σ aus Experimenten bestimmt werden muss. Diese Darstellung beruht auf der Annahme, dass die Varianz σ nicht von x und z abhängt.

Wir vereinfachen die Problemstellung nun noch weiter. Im Vergleich zur beobachteten Ortsvariablen (der x -Variablen) ist die beobachtete z -Variable verhältnismäßig klein. Das legt nahe, dass die Ableitungen der Konzentration \bar{c} in der z -Koordinate viel schneller variieren als in der x -Koordinate. Wir vernachlässigen deshalb in (5.16) Ableitungen bezüglich der x -Koordinate, worauf sich (5.16) reduziert zu

$$U \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}(x, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(z) \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}(x, z) \right). \quad (5.17)$$

In diesem Fall muss auf Randbedingungen für \bar{c} im Unendlichen verzichtet werden. Die Gleichung (5.17) ist eine parabolische Differentialgleichung für \bar{c} .

In einem einfachen Beispiel nehmen wir nun an, dass $\lambda = 0$ (keine Schadstoffablagerung), $d \rightarrow \infty$ (keine Inversionsluftschicht) und dass U und D unabhängig von z sind. Dann erhalten wir mit geeignet skalierten Variablen das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}(x, z) &= \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2}(x, z) && \text{für } z > 0 \text{ und } x > 0, \\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}(x, z) &= 0 && \text{für } z = 0, \\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}(x, z) &\rightarrow 0 && \text{für } z \rightarrow \infty, \\ \bar{c}(x, z) &= \delta(z - 1) && \text{für } x = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Die Laplacetransformation von \bar{c} bezüglich der x -Variablen (*siehe Übungen*),

$$\hat{c}(p, z) := \int_0^\infty \exp(-px) \bar{c}(x, z) dx,$$

genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \hat{c}}{dz^2}(p, z) - p \hat{c}(p, z) = -\delta(z - 1),$$

wobei $\frac{d\hat{c}}{dz}(p, z) = 0$ ist für $z = 0$ und $z \rightarrow \infty$. Für fixes p ist die Lösung dieser Differentialgleichung gegeben durch

$$\begin{aligned}\hat{c}(p, z) &= A(p) \exp(-z\sqrt{p}) \quad \text{für } z > 1, \\ \hat{c}(p, z) &= B(p) (\exp(z\sqrt{p}) + \exp(-z\sqrt{p})) \quad \text{für } z < 1,\end{aligned}$$

wobei

$$A(p) = B(p) (\exp(2\sqrt{p}) + 1)$$

(diese Beziehung folgt aus der Stetigkeit der Funktion \hat{c} in $z = 1$) und

$$\left[-A(p) \exp(-\sqrt{p}) - B(p) (\exp(\sqrt{p}) - \exp(-\sqrt{p})) \right] \sqrt{p} = -1$$

(hier wird die Gleichung $\bar{c}(x, z) = \delta(z - 1)$ für $x = 0$ verwendet). Aus den zwei Gleichungen kann hergeleitet werden, dass

$$B(p) = \frac{1}{2\sqrt{p} \exp(\sqrt{p})},$$

woraus mit der inversen Laplacetransformation

$$\mathcal{L}^{-1}f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp(px) f(p) dp$$

angewendet auf die Funktion \hat{c} folgt, dass

$$\begin{aligned}\bar{c}(x, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} B(p) (\exp(z\sqrt{p}) + \exp(-z\sqrt{p})) \exp(px) dp \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp(px - \sqrt{p})}{\sqrt{p}} dp.\end{aligned}\quad (5.19)$$

Durch Substitution $-s^2 = p$ erhält man aus (5.19)

$$\bar{c}(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-s^2 x - is) ds = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \exp(-1/4x) =: \psi(x). \quad (5.20)$$

Die Funktion $\psi(x)$ nimmt den maximalen Wert $\sqrt{2/(\pi e)}$ an der Stelle $1/2$ an. Skaliert man die Kenngrößen wieder zurück, so erhalten wir: Die maximale Konzentration in Bodennähe ist

$$\frac{Q}{U} \sqrt{\frac{2}{\pi e}}$$

in einem Abstand $\frac{Uh^2}{2D}$ vom Schornstein. Die Annahme, dass die Ableitungen in x -Richtung vernachlässigbar sind, ist gerechtfertigt unter der Annahme, dass

$$\frac{Uh}{D} \gg 1.$$

Literaturverzeichnis

- [1] A. J. Chorin and J. E. Marsden. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer Verlag, New York, 3. edition, 1993.
- [2] D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer Verlag, New York, 1992.
- [3] R. Friedman. *Problem Solving for Engineers and Scientists*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.
- [4] C. C. Lin and L. A. Segel. *Mathematics applied to deterministic problems in the natural sciences*. Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1974. With material on elasticity by G. H. Handelman.
- [5] L. A. Segel. Simplification and scaling. *SIAM Rev.*, 14:547–571, 1972.
- [6] A. B. Tayler. *Mathematical models in applied mechanics*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986.