Übungsblatt 1

1. Wir betrachten den freien Fall einer (anfänglich ruhenden) Kugel mit der Masse m und dem Radius r aus der Höhe h_0. Ein Modell für die Bewegung der Kugel lautet:

$$\begin{aligned} mh''(t) &= -mg + F_{\mathrm{r}}(h'(t)), \quad t > 0, \\ h'(0) &= 0, \\ h(0) &= h_0, \end{aligned}$$

   wobei $h(t)$ die Höhe der Kugel nach der Zeit t ist, g die Erdbeschleunigung und $F_{\mathrm{r}}(v)$ den auf die Kugel bei der Fallgeschwindigkeit v wirkenden Luftwiderstand bezeichnet. Nach dem Gesetz von Stokes gilt für genügend kleine Geschwindigkeiten der Kugel:

$$F_{\mathrm{r}}(v) = -6\pi r\eta v, \tag{1}$$

   wobei η die dynamische Viskosität der Luft ist.

   Skizzieren Sie das Verhalten der Geschwindkeit h' der Kugel einmal bei Vernachlässigung des Luftwiderstands F_{r} und einmal mit Berücksichtigung des Luftwiderstands gemäß (1).

2. Wir analysieren die Bewegung eines Federpendels. Dieses besteht aus einer als masselos angenommenen, vertikal angebrachten Feder, deren oberes Ende fixiert und an deren unteren Ende eine kleine Kugel der Masse m befestigt ist. Wir lenken nun die Kugel abwärts um die Strecke d aus der Gleichgewichtslage aus, wodurch die Kugel um die Gleichgewichtslage herum zu schwingen beginnen wird.

   Zeigen Sie mit Dimensionsanalyse, daß die Periodendauer T_0 dieser Schwingung proportional zu $\sqrt{\frac{m}{k}}$ ist, wobei k die Federkonstante der Feder bezeichne. Nehmen Sie hierzu an, daß T_0 nur von den physikalischen Größen m, d und k abhängt.

3. Beweisen Sie den Satz von Pythagoras mit Dimensionsanalyse.

   Hinweis: Verwenden Sie die Dimensionsanalyse, um eine Beziehung der Form $A = f(c, \alpha)$ zwischen dem Flächeninhalt A, der Hypotenuse c und dem kleinsten Winkel α des rechtwinkligen Dreiecks herzustellen. Wenden Sie diese Relation dann auf die beiden rechtwinkligen Teildreiecke an, die entstehen, wenn man die Höhe auf die Hypotenuse einzeichnet.

4. Wir betrachten einen langen, dünnen Draht mit konstanter Temperatur, den wir in der Mitte aufheizen, und suchen einen Ausdruck für die Temperatur $u(t, x)$ des Drahts nach der Zeit t nach dem Erhitzen in der Entfernung x vom Mittelpunkt.

Wir nehmen dazu an, daß die Temperatur an dieser Stelle neben der Abhängigkeit von x und t nur von der im Mittelpunkt erzeugten Wärmeenergie e, der Temperaturleitfähigkeit α und der Wärmekapazität c abhängt. Der Einfachheit halber vernachlässigen wir hier die Abhängigkeit von Querschnitt und Länge des Drahts genauso wie die zum Erhitzen benötigte Zeit.

Zeigen Sie, daß eine Funktion f existiert, so daß

$$u(t,x) = \frac{e}{c\sqrt{\alpha t}} f\Big(\frac{x}{\sqrt{\alpha t}}\Big)$$

gilt.

Hinweis: Als Basisgrößenarten kann man zum Beispiel die Zeit T, die Länge L, die Energie E und die Temperatur Θ wählen. Dann hat die Temperaturleitfähigkeit α die Dimension L^2T^{-1} und die Wärmekapazität c hat die Dimension $E\Theta^{-1}L^{-1}$.

—