Einführung in die Analysis, WS 16/17,
Übungsblatt, Woche ab 24.10.

1. Für die Funktion $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestimme man $f(A)$ und $f^{-1}(B)$:
   a) $f(x) = x + 3$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B =]-1, 3[$.
   b) $f(x) = x^2 - 1$, $A =]-1, 1[$, $B = \{-1, 0\}$.
   c) $f(x) = 5$, $A = \{0\} \cup]1, 2[$, $B = \{5\}$.

2. Seien A_1, A_2 Teilmengen der Definitionsmenge von f. Man zeige
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$
   und konstruiere ein Beispiel, bei dem nicht die Gleichheit gilt. Man gebe eine in der Vorlesung definierte Eigenschaft von f an, die die Gleichheit garantiert.

3. Selbe Aufgabenstellung wie im vorigen Beispiel für
$$f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)\,.$$

4. Man untersuche die Abbildung
$$f:\ \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = \frac{1}{x-1}$$
   auf Injektivität und Surjektivität.

5. Man klassifiziere die Abbildung $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^k + a$ mit $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, bezüglich der Eigenschaften injektiv und surjektiv. Wenn diese nicht gelten, verkleinere man Definitions- und/oder Bildmenge, sodass die entstehende Abbildung bijektiv ist.

6. Sei $f:\ A \to B$ eine Funktion und $A_1 \subset A$. Man zeige, dass die Mengen $f(A^c)$ und $f(A)^c$ bezüglich $\subset$ im Allgemeinen nicht vergleichbar sind. Was kann man für injektive bzw. surjektive Funktionen aussagen?

7. Man zeige
$$f \text{ und } g \text{ bijektiv} \quad \Rightarrow \quad f \circ g \text{ bijektiv}$$
   und, dass die Äquivalenz nicht stimmt (durch Angabe eines Gegenbeispiels).

8. Man zeige, dass die Abbildung
$$f:\ \{1, 2, 3\}^2 \to \{0, 1, \ldots, 8\}\,, \qquad f((m, n)) = 3(m-1) + n - 1\,,$$
   bijektiv ist, und man bestimme die Umkehrabbildung.