Übungsblatt 6

Beispiel 1.
Zeigen Sie, dass für alle $p \in \mathbb{N}$ *(entgegen der Konvention in der StEOP-Vorlesung ist die Zahl* 0 *bei uns nicht in der Menge* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *der natürlichen Zahlen enthalten)*

$$\frac{1}{n^{1/p}} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Beispiel 2.
Zeigen Sie, dass

$$n^{1/n} \to 1 \text{ für } n \to \infty.$$

Beispiel 3.
Zeigen Sie, dass für alle $p \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$

$$n^p q^n \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Beispiel 4.
Sei $\rho \in \mathbb{R}$ mit $|\rho| < 1$ und $k \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie den Grenzwert von

$$a_n := \sum_{i=0}^{n} k\rho^i.$$

Beispiel 5.
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Eine Darstellung von α in der Form

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

mit $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, heißt Kettenbruch.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Parameter $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des Kettenbruchs durch folgenden Algorithmus aus seinem Wert α gewinnen lassen:

$$\begin{aligned} a_0 &= [\alpha]\,, & \alpha_1 &= \alpha - a_0\,, & \\ a_n &= \left[\frac{1}{\alpha_n}\right], & \alpha_{n+1} &= \frac{1}{\alpha_n} - a_n\,, & n \geq 1. \end{aligned}$$

(Dabei bezeichnet $[\alpha]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich α.)

(b) Zeigen Sie, dass für rationale Zahlen $\alpha \in \mathbb{Q}$ der Algorithmus zur Bestimmung der Parameter $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einem Iterationsschritt $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_{n_0} = 0$ führt, wo der Algorithmus dann zwangsläufig stoppt!

Bemerkung: Zum Beispiel gilt

$$\alpha = \frac{73}{43} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}}\,.$$

Bricht man die Kettenbruchentwicklung bei a_1, a_2, a_3, a_4 *ab, so ergibt sich der Reihe nach* 2, $\frac{5}{3}$, $\frac{17}{10}$, $\frac{73}{43}$. *Die Kettenbruchentwicklung liefert stets optimale Resultate, also*

$$\left|\alpha - \frac{17}{10}\right| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \quad \textit{für alle} \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \quad \textit{mit} \quad q < 10.$$

(c) Für irrationale Zahlen ergibt sich ein unendlicher Kettenbruch.

Berechnen Sie die ersten drei Glieder (a_0, a_1, a_2) der Kettenbruchentwicklung für $\sqrt{2}$ und π.

Beispiel 6.

Wir betrachten die Lösung der Gleichung

$$x - \cos(x) = 0.$$

Ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$, berechnen Sie Näherungslösungen mit

(a) der Methode der sukzessiven Approximation:

$$x_{n+1} = \cos(x_n),$$

(b) dem Newton-Verfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)}.$$

Brechen Sie beide Verfahren ab, wenn

$$|x_n - \cos(x_n)| < 10^{-2}$$

wird.

Beispiel 7.

Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

Beispiel 8.

Sei $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right)$, $a_0 = 10$.

Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt? Angenommen sie ist konvergent, was ist der Grenzwert?

———