Übungsblatt 7

Beispiel 1.
Sei $P_k(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0$, $a_k \neq 0$, ein Polynom vom Grad k.

(a) Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P_k(x_n) = P_k(x)$.

(b) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} P_k(x_n) = P_k(x) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$?

(c) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} P_1(x_n) = P_1(x) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$?

Beispiel 2.
Sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeigen Sie, dass falls $\forall_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j\leq n} |a_{j+1} - a_j| \leq C$ gilt, die Folge eine Cauchy-Folge ist.

Beispiel 3.
Für $n = 2, 3, \ldots$ sei s_n die Seitenlänge eines regelmäßigen 2^n-Ecks, das von einem Kreis mit Radius 1 eingeschrieben ist. Zeigen Sie:

$$s_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}\,.$$

Berechnen Sie hieraus mit der Ausschöpfungsmethode von Eudoxos die Zahl π approximativ, sodass der Fehler kleiner als 10^{-2} ist. Bei dieser Methode wird die Fläche des Kreises durch ein regelmäßiges 2^n-Eck ausgeschöpft.

Beispiel 4.
Zeigen Sie, dass $\sqrt{5} - 1$ keine rationale Zahl ist.

Beispiel 2.12 der Vorlesung zeigt aber, dass sie beliebig genau approximiert werden kann.

Was ist die best-approximierende rationale Zahl p/q, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, mit $q \leq 18$?

Beispiel 5.
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Beispiel 6 (Cauchy'scher Grenzwertsatz).
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \to a \quad (n \to \infty).$$

Beispiel 7 (Arithmetisch-geometrisches Mittel).
Sei $0 < a_0 < b_0$, und

$$\begin{aligned}
a_1 &:= \sqrt{a_0 b_0}\,, \quad b_1 := \frac{a_0 + b_0}{2}\,,\\
a_2 &:= \sqrt{a_1 b_1}\,, \quad b_2 := \frac{a_1 + b_1}{2}\,,\\
&\ \vdots \qquad\quad \vdots\\
a_{n+1} &:= \sqrt{a_n b_n}\,, \quad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}\,.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wachsend bzw. abnehmend gegen einen gemeinsamen Grenzwert (das arithmetisch-geometrische Mittel der Zahlen a_0, b_0) konvergieren.

Beispiel 8.

Zeigen Sie, dass die Folge

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

konvergent ist.