Übungsblatt 10

Beispiel 1.

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!} x^n$, wobei $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\dots 1$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}$.

Beispiel 2.

Beweisen Sie das Kummersche Konvergenzkriterium: Seien $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen von positiven reellen Zahlen mit der Eigenschaft: Es existiert ein $\theta > 0$, sodass

$$\theta c_k \leq a_{k-1}c_{k-1} - a_k c_k \,, \qquad \forall_{k=2,3,\dots}.$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \,.$$

Beispiel 3.

Beweisen Sie das Kummersche Divergenzkriterium: Seien $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen von positiven reellen Zahlen mit den Eigenschaften

- $a_{k-1}\dfrac{c_{k-1}}{c_k} - a_k \leq 0 \quad \forall_{k=2,3,\dots}$ und
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ divergiert.

Dann divergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \,.$$

Beispiel 4.

Zeigen Sie mit Hilfe des Kummerschen Konvergenzkriteriums, dass wenn $b_1 - a_1 > 1$ und

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n^m + a_1 n^{m-1} + \dots + a_m}{n^m + b_1 n^{m-1} + \dots + b_m}$$

die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert.

Beispiel 5.

Zeigen Sie mit Hilfe des Kummerschen Divergenzkriteriums, dass wenn $b_1 - a_1 \leq 1$ und

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n^m + a_1 n^{m-1} + \dots + a_m}{n^m + b_1 n^{m-1} + \dots + b_m}$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent.

Beispiel 6.
Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz:

(a) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots,$

(b) $1 + x + \dfrac{x^2}{1 \cdot 2} + \dfrac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots.$

Beispiel 7.
Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bedingt konvergent. Dann ändert sich der Grenzwert durch Zusammenfassen von höchstens m Gliedern (ohne Umordnung) nicht.

Beispiel 8.
Zeigen Sie den Cauchyschen Verdichtungssatz: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von nicht-negativen Zahlen. Dann gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.