

$$\forall x, y \in H$$

Projektortheorem $\Rightarrow$ i) $\operatorname{Re} \langle x - P_K(x), P_K(x) - P_K(y) \rangle \geq 0$
 ii) $\operatorname{Re} \langle y - P_K(y), P_K(x) - P_K(y) \rangle \leq 0$

a)

$$i) + ii) \Rightarrow \operatorname{Re} \langle x - y + P_K(x) - P_K(y), P_K(x) - P_K(y) \rangle \geq 0$$

~~$$\Rightarrow \operatorname{Re} \langle x - y, P_K(x) - P_K(y) \rangle + \operatorname{Re} \langle P_K(x) - P_K(y), P_K(x) - P_K(y) \rangle \geq 0$$~~

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \langle x - y, P_K(x) - P_K(y) \rangle \geq - \|P_K(x) - P_K(y)\|^2$$

b) $\operatorname{Re} \langle x - y, P_K(x) - P_K(y) \rangle \leq |\langle x - y, P_K(x) - P_K(y) \rangle|$
 $\stackrel{\text{CBS}}{\leq} \|x - y\| \|P_K(x) - P_K(y)\|$

Dann a) + b) $\Rightarrow$

$$\|P_K(x) - P_K(y)\|^2 \leq \|x - y\| \|P_K(x) - P_K(y)\|$$

$$\Leftrightarrow \|P_K(x) - P_K(y)\| \leq 1 \cdot \|x - y\|$$

Lipschitzkonstante.

a)

Sei $y = \text{Pr}(x) \in K$.

$$\text{Sei } h: \mathbb{R} \rightarrow H \quad \left| \begin{array}{l} h \text{ stetig} \\ h(0) = y \end{array} \right.$$

$$t \mapsto tx + (1-t)y$$

Angenommen $y \in \overset{\circ}{K} \Rightarrow h(0) \in \overset{\circ}{K}$ und weil h stetig und $\overset{\circ}{K}$ offen $\Rightarrow \exists 0 < \delta < 1$, sd $\forall t \in [-\delta, \delta]$ gilt $h(t) \in K$

Oder auch $\delta x + (1-\delta)y \in K$

ii) $\Rightarrow d(x, K) \leq \|x - (\delta x + (1-\delta)y)\| = (1-\delta)\|x - y\|$

iii) Aber $y = \text{Pr}(x)$, sd $d(x, K) = \|x - y\|$
 $\Rightarrow \|x - y\| \leq (1-\delta)\|x - y\|$, mit $\|x - y\| > 0$

$$\Rightarrow \|x - y\| < 1 - \delta \text{ mit } \delta > 0 \quad \Leftarrow$$

iv) $\Rightarrow y \notin \overset{\circ}{K}$ aber $y \in K \Rightarrow y \in K \setminus \overset{\circ}{K} = \partial K \quad \square$

b) ~~to~~

weil $\partial K \neq \emptyset$ und $\partial K \subseteq K$

$$\Rightarrow d(x, K) \leq d(x, \partial K)$$

Aus a) folgt $y = \text{Pr}(x) \in \partial K$, also $d(x, \partial K) \leq \|x -$

Leut Angabe gilt ∂K konvex, nicht leer, ~~aber~~^{immer} abgeschlossen.

$\Rightarrow \exists \text{Pr}_{\partial K}(x) \in \partial K$ und eindeutig mit der Eigenschaft $d(x, \partial K) = \|x - \text{Pr}_{\partial K}(x)\|$

weil $\|x - y\| = d(x, \partial K)$. $\wedge y \in \partial K \Rightarrow y = \text{Pr}_{\partial K}(x)$,

$$2 \|a\|^2 + \|b\|^2 = \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2$$

Sei $y_1 = x - P_{K_1}(x)$
 $y_2 = x - P_{K_2}(x)$

$$\Rightarrow 4 \left\| x - \frac{P_{K_1}(x) + P_{K_2}(x)}{2} \right\|^2 + \|P_{K_1}(x) - P_{K_2}(x)\|^2 = 2(d(x, K_1)^2 + d(x, K_2)^2).$$

Weil $K_1 \subset K_2$, $\frac{(P_{K_1}(x) + P_{K_2}(x))}{2} \in K_2$.

$$\Rightarrow \left\| x - \frac{P_{K_1}(x) + P_{K_2}(x)}{2} \right\|^2 \geq d(x, K_2)^2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|P_{K_1}(x) - P_{K_2}(x)\|^2 &\leq 2(d(x, K_1)^2 + d(x, K_2)^2) \\ &\quad - 4d(x, K_2)^2 \\ &= 2(d(x, K_1)^2 - d(x, K_2)^2) \end{aligned}$$

✓

$$K = \{ f \in L_2[0,1] \mid \int_0^1 |f(x)| dx \leq 1 \} \subseteq L_2[0,1].$$

a) K abgeschlossen, konvex, nicht leer.

(i) Konvex. Sei $f, g \in K$. $0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 |f(x)| dx \leq 1$
 $\int_0^1 |g(x)| dx \leq 1$

$$\Rightarrow \int_0^1 |\lambda f(x) + (1-\lambda)g(x)| dx \leq \lambda \int_0^1 |f(x)| dx + (1-\lambda) \int_0^1 |g(x)| dx \leq 1$$

$$\Rightarrow \lambda f + (1-\lambda)g \in K$$

(ii) abgeschlossen, nicht-leer:

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K$ und $f \in L_2[0,1]$ so $f_n \rightarrow f$ in $L_2[0,1]$
 $\Rightarrow \int_0^1 |f_n - f|^2 dx \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &\leq \int_0^1 |f_n - f(x)| dx + \int_0^1 |f_n(x)| dx \\ &\leq \|f_n - f\|_1 + 1 \leq \|f_n - f\|_2 + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n \rightarrow \infty \Rightarrow \int_0^1 |f(x)| dx \leq 1 \text{ mit } f \in K \Rightarrow K \text{ abgeschlossen} \\ \Rightarrow K \text{ nicht-leer}$$

b)

$$K_t = \{x \in [0,1] \mid 8x > t\} = \begin{cases} (t/8, 1] & 0 \leq t \leq 8 \\ \emptyset & t > 8 \end{cases}$$

und

$$\varphi(t) = \int_{K_t} 8x \, dx - t|K_t| = \begin{cases} \int_{t/8}^1 8x \, dx - t(1-t/8), & 0 \leq t \leq 8 \\ 0 & t > 8 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (t^2 - 16t + 64)/16 & 0 \leq t \leq 8 \\ 0 & t > 8 \end{cases}$$

Wir suchen $k \geq 0$ st $k\varphi(k) = k \Leftrightarrow \varphi(k) = 1$.

$$\varphi(k) = (k^2 - 16k + 64)/16 = 1 \Leftrightarrow k = 4.$$

$$\frac{36 - 64 + 64}{16} = 1$$

$$\Rightarrow \mu_r(8x) = \begin{cases} 8x - \frac{32}{16} & x \in K_H \\ 0 & x \notin K_H \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 8x - 4 & x \in (1/2, 1] \\ 0 & x \in [0, 1/2] \end{cases}$$

17.

$\varphi(x)$ erreicht Infimum in einem
 eindeutigen Pkt auf beliebiger konvexer Menge.

c) Wegen Riesz

$$\exists! \gamma \in H, \text{ s.d. } \varphi(x) = f(x) = \langle x, \gamma \rangle \quad \forall x \in H.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(x) &= \|x\|^2 - \langle x, \gamma \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \langle x, \gamma \rangle \\ &= \langle x, x - \gamma \rangle. \end{aligned}$$

Wegen $\langle a, b \rangle = \frac{\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2}{4} \quad \forall a, b \in H$ Polarisation

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(x) &= \frac{\|x + x - \gamma\|^2 - \|x - x + \gamma\|^2}{4} \\ &= \frac{\|2x - \gamma\|^2 - \|\gamma\|^2}{4} = \|x - \frac{\gamma}{2}\|^2 - \|\gamma/2\|^2 \quad \forall x \in H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \inf_{x \in K} \varphi(x) &= \inf_{x \in K} \|x - \gamma/2\|^2 - \|\gamma/2\|^2 \\ &= d(\gamma/2, K)^2 - \|\gamma/2\|^2. \end{aligned}$$

Projektionstheore

$$\begin{aligned} \Rightarrow \inf_{x \in K} \varphi(x) &= \|\gamma/2 - P_K(\gamma/2)\|^2 - \|\gamma/2\|^2 \\ &= \varphi(P_K(\gamma/2)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi$ hat eindeutiges Min in K an der
 Stelle $P_K(\gamma/2)$

b)

$$\inf \mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(P_{R_K}(g/2))$$

$$= \varphi(\dot{t}_0)$$

~~$$= \int (x-4)^2 dx = 32/3$$~~

$$= \int_{1/2}^1 (8x-4)^2 dx - 16 \int_{1/2}^1 x(8x-4) dx$$

2 - 3/2

$$\phi_x : H \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto a(x, y)$$

a... Bilinearform.

(a)

i) Riesz $\Rightarrow \exists! T_x \in H$, sd $\forall y \in H$ gilt

$$a(T_x, y) = (T_x, y)$$

ii) T_x eindeutig $\Rightarrow x \mapsto T_x$ linear.

iii) Wegen Riesz gilt $\|T_x\| = \|\phi_x\|$

Wahl $\|\phi_x\| \leq C\|x\| \Rightarrow T$ stetig und $\|T\| = C$.

(b) Sei $y \in (T(H))^\perp$

$\Rightarrow \forall x \in H$ gilt $\langle T_x, y \rangle = 0$

$$\Rightarrow 0 = \langle T_y, y \rangle = a(y, y) \geq \alpha \|y\|^2$$

$$\Rightarrow y = 0$$

$\Rightarrow T(E)$ dicht in E

(c)

$$\begin{aligned} \text{i) } x \in H \text{ mit CS folgt } \alpha \|x\|^2 &\leq a(x, x) \\ &= (T_x, x) \\ &\leq \|T_x\| \|x\| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha \|x\| \leq \|T_x\| \text{ mit } x \neq 0$$

ii) Aus i) folgt T injektiv, weil.

$$\alpha \|x\|^2 \leq \|Tx\|^2 \Rightarrow \alpha^{-1} \|x\| \geq \|T^{-1}x\|$$

iii) $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in $T(H)$

Für $\forall n, p \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|Tx_n - Tx_p\| \stackrel{\text{lin}}{=} \|T(x_n - x_p)\| \geq \alpha \|x_n - x_p\|$$

$\Rightarrow x_n$ ist Cauchyfolge in H

$\Rightarrow T$ stetig $\Rightarrow (Tx_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow Tx$

$\Rightarrow T(H)$ abgeschlossen.

d) e) $T(H)$ abgeschlossen und dicht in H

$$\Rightarrow T(H) = H$$

cc) T injektiv $\Rightarrow T$ Isomorphismus von H auf H .