

Bsp

Bessel, Pythagoras

$$Ux = \sum \lambda_i f_i(x, e_i)$$

$$\|Ux\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \|f_i\|^2 |\langle x, e_i \rangle|^2$$

$$\langle Ux, Ux \rangle = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |\langle x, e_i \rangle|^2$$

$$\leq M^2 \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq M^2 \|x\|^2 \quad \text{Bessel.}$$

$$M = \max |\lambda_i|$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \|Ux\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in H$$

$$\Rightarrow \|U\| \leq M.$$

$$\text{Wir haben } \|Ue_i\| \leq \|U\| \|e_i\|$$

$$\text{Wir wissen } Ue_i = \lambda_i b_i \Rightarrow |\lambda_i| \leq \|U\|$$

$$\Rightarrow \max_{i=1 \dots n} |\lambda_i| \leq \|U\|$$

$$\Rightarrow \|U\| = \max_{i=1 \dots n} |\lambda_i|.$$

$$a^2 = a^2 + b^2$$

Bessel:

$$\sum_{e \in S} |\langle x, e \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Pythagoras $\rightarrow$ Plancherel.

$$\|\sum u_k\|^2 = \sum \|u_k\|^2$$

$$\|\sum u_k\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots$$

$$\sum \|u_k\|^2 < \infty$$

$$\Leftrightarrow \sum u_k < \infty$$

Bsp 2.

Weg

a) Pythagoras.

$$\|Ux\|^2 = \|a\|^2 |\langle x, b \rangle|^2 + \|b\|^2 |\langle x, a \rangle|^2$$

Mit Bessel

$$\|Ux\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 (|\langle x, b/\|b\| \rangle|^2 + |\langle x, a/\|a\| \rangle|^2)$$

$$\leq \|a\|^2 \|b\|^2 \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \|U\| \leq \|a\| \|b\|$$

Aber $U(a) = b\|a\|^2$

~~$$\|a\|^2 \|b\| = \|U(a)\| \leq \|a\| \|b\| \|a\|$$~~

und $\|a\|^2 \|b\| = \|U(a)\| \leq \|U\| \|a\|$

$$\Rightarrow \|a\| \|b\| \leq \|U\|$$

$$\Rightarrow \|U\| = \|a\| \|b\|$$

$$\text{Wort } \langle \sin x, \cos x \rangle = \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx \\ = 0.$$

$$\|U\| = \|\sin x\| \|\cos x\|$$

$$\|\sin x\|^2 = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \pi/2$$

$$\|\cos(x)\|^2 = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \pi/2$$

$$\|U\|^2 = \|\sin x\|^2 \|\cos(x)\|^2$$

$$= \frac{\pi^2}{4}$$

$$\Rightarrow \|U\| = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

Leibniz:

z: Für $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ CF in der Operator Norm,

$\exists$ ein $A \in \mathcal{B}(H)$. sd $\|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

i) Sei $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ein CF, dann gilt für $\forall x \in H$
 $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ist CF in H weil
Linearität

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| \quad \text{mit } n, m \geq N$$

ii). Weil H vollständig. konvergiert $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow y \in H$.
sd
 $Ax = y$

~~Sei~~ A linear operator, weil

$$|\|A_n\| - \|A_m\|| \leq \|A_n - A_m\| \quad (*)$$

$\Rightarrow \{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ is CF in $\mathbb{R}$. mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| = c$.

$$\Rightarrow \|Ax\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \|x\| = c \|x\|.$$

$\Rightarrow A$ ist beschränkter Operator $(**)$

iii) $\exists A_n \rightarrow A$ in operator norm

weel $\|(A - A_n)x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A_n - A_n)x\|$, then

~~weel~~
$$\frac{\|(A - A_n)x\|}{\|x\|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A_n\|$$

$$\Rightarrow \|A - A_n\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A - A_n)x\|}{\|x\|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A_n\|$$

Def. 9

$$\text{Sei } v \in H; \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} (v, e_n) e_n$$

$$A \in \mathcal{B}(H) \text{ ist eindeutig wegen } A(v) = \sum_{n=1}^{\infty} (v, e_n) A(e_n).$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (v, e_n) e_{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [(v, e_1) e_2 + \dots + (v, e_n) e_{n+1}]$$

Isometrie:

$$\|Av\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (v, e_n)^2 = \|v\|^2$$

A linearer Op

$$Av = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n (v, e_n) e_{n+1} \quad \text{ist linear.}$$

$\Rightarrow A$ ist lineare Isometrie. und $\|A\| = 1$.

$\text{Kern}(A) = \{0\}$, A ist injektiv.

Bild von A abgeschlossen.

$$\text{Sei } \varphi(v) = (v, e_n) : \varphi \in E'$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(\varphi) = \overline{(e_2, e_3, \dots, e_n, \dots)} = \text{Im}(A) = \{v \in H \mid (v, e_1) = 0\}$$

✓

b) Sei $B = A^*$ $\Rightarrow \forall v \in H : (Av, v) = (v, v)$

$$\Rightarrow (Ae_n, v) = (e_n, Bv) = (e_{n+1}, v) \quad \forall n \geq 1.$$

$$\Rightarrow (Bv, e_1) = (v, e_2), \dots, (Bv, e_n) = (v, e_{n+1}), \dots$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall v \in H : Bv &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(v, e_2)e_1 + (v, e_3)e_2 + \dots + (v, e_{n+1})e_n] \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (v, e_n) e_{n-1} \end{aligned}$$

D.h. $B(e_1) = 0$ und $B(e_n) = e_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

Bild, Kern
von B

a) $B \in \mathcal{B}(H)$ ($\forall A \in \mathcal{B}(H) \Rightarrow A^* \in \mathcal{B}(H)$)

$\Rightarrow B(v) = 0 \Rightarrow v = \lambda e_1$ oder $\lambda \in \mathbb{R} : \text{Kern}(B) = \text{span}\{e_1\}$

$\Rightarrow \text{Kern}(B)$ ist abgeschlossen weil endlich.

$\Rightarrow B$ ist surjektiv weil $\text{Im}(B) = H$.

c) $\|Bv\|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} (e_n, v)^2 = \|v\|^2 - (v, e_1)^2 \leq \|v\|^2$

$$\Rightarrow \|B\| \leq 1$$

B beschränkt auf $K = \{v \in H \mid \|v\|=1 \text{ und } (v, e_1)=0\}$

$$\Rightarrow \forall v \in K : \|Bv\| = \|v\| \Rightarrow \|B\| = 1.$$

(Es gilt allgemein $\forall A$, dass $\|A\| = \|A^*\|$).

partielle Isometrie

(2)

so auf $e_1^\perp$

$$\begin{aligned} e_1 \notin \text{Kern}(U) &\Rightarrow H = \text{Kern}(U) \oplus [e_1]^\perp \\ &= \text{Im}(U) \oplus \text{Kern}(B) \quad \checkmark \end{aligned}$$

a) $A \circ B$

$$\begin{aligned} (A \circ B)(v) &= A\left(\sum_{n=2}^{\infty} (v, e_n) e_{n-1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} (v, e_n) e_n \\ &= v - (v, e_1) e_1 \\ &= \text{Id} - P_{e_1} = P_{e_1}^\perp v \end{aligned}$$

$\Rightarrow (A \circ B)$ ist ~~Proj~~ ortho Projektion auf $[e_1]^\perp$.

a) $(B \circ A)$

$$(B \circ A)v = B\left(\sum_{n=1}^{\infty} (v, e_n) e_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (v, e_n) e_n = \text{Id}_H.$$

Bemerkung

B ist linksinvers von A , ~~aber~~ $\Leftrightarrow A$ rechtsinvers von B .

Aber A hat keine rechtsinvers $\Rightarrow$ interessant! ∇
6

$$A_k(v) = \sum_{n=1}^{\infty} (v, e_n) e_{n+k} \quad \text{mit} \quad D_k = \sum_{n=k+1}^{\infty}$$

$$A_k(\xi_1, \xi_2, \dots) = (0, 0, 0, \dots, \xi_1, \dots)$$

$$B_k(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots)$$

Isometrie

$$\|A_k v\|^2 = \sum (v, e_n)^2 = \|v\|^2 \quad A_k \text{ ist Isometrie.}$$

Im(A_k)

$$\text{Im}(A_k) = \text{Kern}(A_1) \cap \dots \cap \text{Kern}(A_k)$$

mit $\varphi_i(v) = (v, e_i)$ ist endlicher Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

Kern(B_k)

$$a) \text{ Kern}(B_k) = [e_1, \dots, e_k]$$

$$\dim(\text{Kern}(B_k)) < \infty \Rightarrow \text{abgeschlossen}$$

$$b) \text{ Im}(B_k) = H \Rightarrow \text{surjektiv}$$

$$c) H = \text{Kern}(B_k) \oplus \text{Im}(A_k) = [e_1, \dots, e_k] \oplus [e_{k+1}, \dots]$$

$$T = Id_H$$

$$u \circ B_k = Id_H - [e_1 \dots e_k] = Id_H - P_{[e_1 \dots e_k]}^\perp$$

a) $(A_k)^* = B_k$

$k=1 \quad \checkmark \quad IA$

$k \rightarrow k+1 \quad IV$

$k=k+1 \quad IS$

$$\begin{aligned} (A_{k+1} u, v) &= (A A_k u, v) = (A u, B_k v) \\ &= (u, B B_k v) = (u, B_{k+1} v) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B_{k+1} = A_{k+1}^*$$

d) $\forall u \in H : \|B_k u\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} (u, e_n)^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ (ist Rest einer konvergenz Reihe $\Rightarrow \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|A_{k+p}(u) - A_k(u)\|^2 &= \|A_{k+p} u\|^2 - 2(A_{k+p} u, A_k u) \\ &\quad + \|A_k u\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2(A_p u, A_k^* A_k u) + \|u\|^2 \\ &= 2\|u\|^2 - 2(A_p u, u) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ für $k \rightarrow \infty \quad A_{k+p} u - A_k u \rightarrow 0$

Deswegen $*$ ist die Operation $x: A \rightarrow A^*$ nicht stetig in der Norm Topologie

$$x_0 \in H$$

$$\begin{aligned} \{ \min \|x - x_0\| : x \in M \} &= \max \{ |\langle x_0, y \rangle| : y \in M^\perp, \|y\|=1 \} \\ &= A \qquad \qquad \qquad = B \end{aligned}$$

$$x_0 = u_1 + u_2$$

$$\begin{aligned} u_1 &\in M \\ u_2 &\in M^\perp \end{aligned}$$

1. Fall $u_2 = 0$

$$\rightarrow x_0 \in M \Rightarrow \min A = 0 = \max B$$

2. Fall $u_2 \neq 0$

$$\min A = \|x_0 - \underbrace{P_M x_0}_{=u_1}\| = \|u_1 + u_2 - u_1\| = \|u_2\|$$

$$\begin{aligned} \max B &= \max_y \underbrace{|\langle u_1, y \rangle|}_{=0} + \underbrace{|\langle u_2, y \rangle|}_{\|u_2\| \left\langle \frac{u_2}{\|u_2\|}, y \right\rangle} \\ &\qquad \qquad \qquad -1 \leq \qquad \leq 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{wir} \text{ wind } \max \text{ wenn } \|y\|=1 \text{ und } \frac{u_2}{\|u_2\|} = y.$$

$$\Rightarrow \|u_2\| = \cancel{\|u_2\|}$$

$$\|u_2\| = \min A = \max B = \|u_2\|,$$