3

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sd $cx + dy = 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

und $ax + bx = 0$

$\Longleftrightarrow$

$y = x \tan\theta$

$\Rightarrow A = a \begin{pmatrix} 1 & -1/\tan\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\Rightarrow A^2 = a^2 \begin{pmatrix} 1 & -1/\tan\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ if $A^2 = A \Rightarrow a = \{1, -1\}$.

Wähle $a = 1$

Dann erhalten wir $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/\tan\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Und $T_\theta \in \mathcal{B}(H, H)$ mit $T_\theta(x, y) = (x - y/\tan\theta, 0)$

$\forall x, y \in H$

$\|T_\theta\| = \sup_{|x|^2 + |y|^2 \leq 1} \frac{1}{\sin\theta} |x \sin\theta - y \cos\theta|$

$= \frac{1}{\sin\theta} (\sin^2\theta - \cos^2\theta)^{1/2} = \frac{1}{\sin\theta}$

$\Rightarrow \|T_\theta\| > 1 \Rightarrow$ kein orthogonaler Projektor.

i) ($\Leftarrow$) Wenn $P(H) \perp Q(H) \Rightarrow Q(H) \subseteq (P(H))^\perp = \text{kern}(P)$.

Wenn $P(H) \subseteq (Q(H))^\perp = \text{kern}(Q)$.

$\Rightarrow PQ = QP = 0 \Rightarrow (P+Q)^2 = P+Q$ ✓

Weil $(P+Q)^* = P^* + Q^* = P + Q$

$\Rightarrow$ ~~Ra~~ $(P+Q)$ selbstadj. $\underset{\|P\|=1}{\Longrightarrow}$ und Idempotent $\Rightarrow P+Q$ orth. Proje

($\Rightarrow$) Sei $P+Q$ ortho $\Leftarrow$ $\underset{P(H)}{P_x} + \underset{Q(H)}{Qx} = y$

$$\Rightarrow (P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + Q$$
$$= P + PQ + QP + Q = P + Q$$
$$\Rightarrow PQ = QP.$$

- Sei ein $x \in Q(H)$ ~~dann~~ gilt $x = \underset{P(H)}{y} + \underset{(P(H))^\perp = \text{kern}(P)}{z}$.

- Wende P an $\Rightarrow P_x = P_y + P_z = P_y = y$.

- Wende PQ an $\Rightarrow PQP_x = PQP_y + PQP_z = PQP_y$

$$\overset{-QP=PQ}{\Leftrightarrow} P_x = -QP^2 y - QP^2 z = -QP^2 y$$
$$P_x = -QP_y - QP_z = -Q\cancel{y}$$
$$= -QP_y = -Qy.$$

$\Rightarrow y + Qy = 0$.

$\cdot)$ $y + Qy = 0$ $\overset{\text{Anwenden von } Q}{\Longrightarrow}$

$$Qy + Q^2 y = 0$$
$$Qy + Qy = 0.$$

dh $Qy = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

$\Rightarrow x = z \in P(H)^\perp$ und $\cdot$ wenn $Q(H) \subseteq P(H)^\perp$

$\Rightarrow P(H) \perp Q(H)$.

~~BP~~ ii) Ist $P+Q$ ortho Projektion, dann gilt.

a) $(P+Q)H = P(H) + Q(H)$.

b) $\mathrm{Ker}(P+Q) = \mathrm{Kern}(P) \cap \mathrm{Kern}(Q)$.

a) Es gilt $(P+Q)(H) \subseteq P(H) + Q(H)$. (*)

Sei $x \in \underset{\cup}{P(H)} + \underset{\cup}{Q(H)}$.

$x = y + z$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $(P+Q)(\cancel{x}) = (P+Q)(\cancel{y}) + (P+Q)(z)$

$= y + z = x$.

$\Rightarrow x \in (P+Q)(H)$.

2. Sei $x \in \ker n(P) \cap \ker n(Q)$.

$\Rightarrow x \in \ker n(P+Q)$

Sei $x \in \ker(P+Q) \Leftrightarrow (P+Q)x = 0$.

Aber $Px \perp Qx \Rightarrow Px = Qx = 0$.

$\Rightarrow x \in \ker n(P) \cap \ker n(Q)$.

Bsp 8

b) $PQ = QP \Rightarrow (PQ)^2 = PQPQ$
$= P(PQ)Q$
$= P^2 Q^2 = PQ$

Weiter $(PQ)^* = QP = PQ \Rightarrow PQ$ ist Ortho Pr. $\blacksquare$

i) $PQ(H) = P(H) \cap Q(H)$

PQ ortho Prj. Sei $x \in PQ(H)$.

$\Rightarrow x \in P(H)$ und $PQ(H) = (\ker(PQ))^\perp$

$\Rightarrow x \in \ker n(PQ)^\perp$ aber $\ker n(Q) \subseteq \ker(PQ)$.

$\Rightarrow$ $\begin{smallmatrix} A \subseteq B \\ B^\perp \subseteq A \end{smallmatrix}$ $\Rightarrow \ker n(PQ)^\perp \subseteq \ker n(Q)^\perp$

$\Rightarrow x \in (\ker n\, Q)^\perp = Q(H) \Rightarrow x \in P(H) \cap Q(H)$

und $(PQ)(H) \subseteq P(H) \cap Q(H)$.

$\dots \in P(H) \cap Q(H) \Rightarrow Px = x,\ Qx = x,\ PQ(x) = x \Rightarrow x \in PQ$

zz: $\operatorname{Kern}(PQ) = \operatorname{kern}(P) + \operatorname{kern}(Q)$

Sei A und B abgeschlossene TR. von H

$\Rightarrow (A \cap B) = (A^{\perp} + B^{\perp})^{\perp}$

Beweis

•) $x \in A \cap B \Rightarrow x \perp A^{\perp}, x \perp B^{\perp} \Rightarrow x \perp (A^{\perp} + B^{\perp})$

$\Rightarrow x \in (A^{\perp} + B^{\perp})^{\perp}$

•) Wenn $x \in (A^{\perp} + B^{\perp})^{\perp}$, weil $0 \in A^{\perp}$, $0 \in B^{\perp}$

$\Rightarrow x \in (A^{\perp})^{\perp}$ und $x \in (B^{\perp})^{\perp} \Rightarrow x \in A \cap B$.

•) Weil $A \cap B = (A^{\perp} + B^{\perp})^{\perp} \Rightarrow (A \cap B)^{\perp} = \overline{(A^{\perp} + B^{\perp})}$

~~So~~

-) Sei $A = P(H)$

$B = Q(H)$

$\Rightarrow (P(H) \cap Q(H))^{\perp} = \overline{(P(H)^{\perp} + Q(H)^{\perp})}$

$\Rightarrow (PQ(H))^{\perp} = \overline{\operatorname{kern} P + \operatorname{kern} Q}$

$= \operatorname{kern}(PQ) =$ —||—

Bsp 5

$(c \Leftrightarrow d)$ ✓ $PQ = Q \Rightarrow PQ^* = Q^*$

$\Rightarrow QP = Q$ ✓

$(b \Leftrightarrow c)$ $(\Rightarrow)$ $PQ = Q \Rightarrow Q(H) \subseteq P(H)$ ✓

$(\Leftarrow)$

$Q(H) \subseteq P(H) \Rightarrow PQx = Q(x) \ \forall x \in H$

weil $Q(x) \in P(H)$

$a) (\Leftrightarrow) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ $(P-Q)$ ortho Proj $\Rightarrow (P-Q)^2 \cancel{= P-Q}$

$\Rightarrow 2Q = PQ + QP.$

i) $\Rightarrow 2PQ = P^2Q + PQP. \Rightarrow PQ = PQP.$

ii) $\Rightarrow 2QP = PQP + QPP$

$= PQP + QP. \Rightarrow QP = PQP$

$\Rightarrow PQ = QP = Q.$

~~$\Rightarrow$ weil $Q = PQ \Rightarrow QP = Q$. $(P-Q)^2 = P-Q$~~

~~und es gilt $(P-Q)^* = P-Q$~~

~~$\Rightarrow P-Q$ ist ortho Projektor~~

$(a) \Leftarrow (b) (c)$

Wenn $Q = PQ$, $Q = QP$. $\Rightarrow 2Q = PQ + QP$

$\Rightarrow (P-Q)^2 = P - Q$ und wohl $(P-Q)^* = P - Q$

$\Rightarrow P - Q$ ist ortho Projektor $\square$