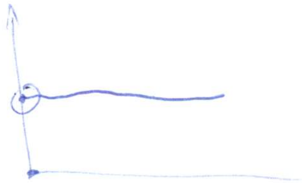
Bsp 1 Vs. $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ M abgeschlossen $\Rightarrow \mathbb{C} \underset{\phi}{\cong} X \setminus M$

$\|\cdot\|_1 \Rightarrow$ M nicht abgeschlosse bzg $\|\cdot\|_1$.

Gbsp

$$f_n(s) = \begin{cases} ns & 0 \le s \le \frac{1}{n} \\ 1 & 1/n < s \le 1 \end{cases}$$



Es gilt $f_n \in M$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \to 1$ aber $1 \notin M$.

$\Rightarrow$ ~~Quot~~ Quotientennorm ist keine Norm in diesem Fall.

∘) Sei $\inf\{\|g\|_1 : g \in [f]\} = 0$ für $\forall\ [f] \in X \setminus M$.

Sei $f \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ mit

$$h_n(s) = f(0)(1 - g_n(s))$$ mit g_n wie oben das (f_n)

$\Rightarrow h_n(0) = f(0).$ und $\|h_n\|_1 = |f(0)|/2n.$

$\Rightarrow \inf\{\|g\|_1 : g \in [f]\} = 0$

Also, ~~die QN~~ $\ker\{QN\} = C([0,1])$ wenn $\|\cdot\|_1$.

Bsp. 3

Sei H ein HR. und M abgeschl. TR. von H

Zeige $Q: H \to H \setminus M$ ist Isomorphismus von $M^\perp \to H\setminus M$.

Lsg:

-) Sei f die Restriktion von Q auf $M^\perp$

-) Sei $x \in \ker(f) \Rightarrow x \in M$ und $x \in M \cap M^\perp$

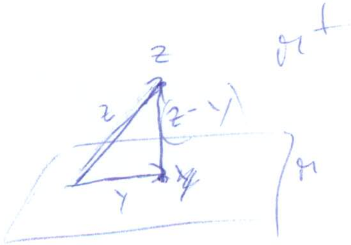
$\Rightarrow x = 0$ und f ist injektiv.

-) Sei $[x] \in X \setminus M$. Wir wissen $X = M + M^\perp$

$x = y + z$

$\Rightarrow [x] = Q(x) = Q(y) + Q(z) = f(z)$.

also ist f surjektiv weil $[x] = f(z)$



-) $\|f(z)\|^2 = \inf\{\|z-y\|^2 : y \in M\}$

$= \inf\{\|z\|^2 + \|y\|^2 : y \in M\}$

$= \|z\|^2$.

Bsp 4

Es gilt weil Id stetig, daß

$$\|m\|_X \leq C_1 \|m\|_M \qquad (*)$$
$$\|n\|_X \leq C_2 \|n\|_N$$

1) i) PD $\|\cdot\|_M$ und $\|\cdot\|_N > 0 \Rightarrow \cancel{\|\cdot\|_M} + T \quad \|\cdot\|_{M+N} > 0$.

Angenommen $x \in M+N$, $\|x\|_{M+N} = 0$

$\Rightarrow \exists\, m_k \in M$ und $\exists\, n_k \in N$ mit $x_k = m_k + n_k$.

und $\underbrace{\|m_k\|_M}_{\downarrow} + \underbrace{\|n_k\|_N}_{\downarrow} \to 0$

$\Rightarrow \quad 0 \qquad 0 \qquad \Rightarrow m_k \to 0$ in M
$n_k \to 0$ in N.

Wegen $(*)$ gilt auch $x_k \to 0$.
$x_k = m_k + n_k \to 0$

$\Rightarrow x = 0$

ii) $x \in M+N \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\|\alpha x\|_{M+N} = \inf\{\|m\|_M + \|n\|_N : m \in M, n \in N, \cancel{\alpha} x = m+n\}$$
$$= \inf\{\|\alpha m\|_M + \|n\cancel{\alpha}\|_N : m \in M, n \in N, x = m+n\}$$
$$= \inf\{|\alpha|(\|m\|_M + \|n\|_N : m \in M, n \in N, x = m+n\}$$
$$= |\alpha| \cancel{\inf} \|\cancel{\alpha} x\|_{M+N}.$$

iii) DU

Sei $x, y \in M+N$ $\quad m_k, m'_k \in M$

$\quad n_k, n'_k \in N$

sd $\quad x = m_k + n_k \quad$ und $\quad \|m_k\|_M + \|n_k\|_N \to \|x\|_{M+N}$

$\quad y = m'_k + n'_k \quad\quad \|m'_k\|_M + \|n'_k\|_N \to \|y\|_{M+N}$.

$\Rightarrow (x+y) = (m_k + m'_k) + (n_k + n'_k)$.

$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|m_k + m'_k\| + \|n_k + n'_k\|$

$\leq \|m_k\| + \|m'_k\| + \|n_k\| + \|n'_k\|$

$\overset{k\to\infty}{=} \|x\| + \|y\|$. $\blacksquare$

2) Verwende NR vollständig $\Leftrightarrow \forall \sum |x_i| < \infty \Rightarrow \sum x_i < \infty$.

Wähle k, sd $m_k \in M$, $n_k \in N$, sd $x_k = m_k + n_k$.

und $\|m_k\|_M + \|n_k\|_N \leq \|x_k\|_{M+N} + \frac{1}{2^k}$

$\Rightarrow \sum_i \|m_k\|_M + \sum \|n_k\|_N \leq \sum_i \|x_k\|_{M+N} + \sum_i \frac{1}{2^k} < \infty$

Weil M und N vollständig $\Rightarrow m_k, n_k$ sind summierbar

und $m = \sum m_k$, $n = \sum n_k$ $\Rightarrow \sum x_k = m + n$.

$\Rightarrow M+N$ vollständig.

Bsp 3 (1)

$A : \ell^1 \to c_0^*$

$x \in c_0$

$\underbrace{(Ay)}_{f \in c_0^*}(x) = \langle x, Ay \rangle = \sum_1 x_k y_k \qquad y \in \ell^1$

i) Wohldefiniert

$|(Ay)(x)| = |\langle x, Ay \rangle| = |\sum_1 x_k y_k|$
$\leq \sum_1 |x_k||y_k|$
$\leq \sup|x_k| \sum_1 |y_k| = \|x\|_{c_0} \|y\|_{\ell^1} < \infty$

$\Rightarrow$ 1) A stetig mit $\|Ay\| \leq \|y\|_{\ell^1}$

2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wohldefiniert.

3) A ist linear ✓

(ii) Injektiv.

ZZ $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

wähle $e_k = \begin{cases} 1 & \text{an der Stelle } k \\ 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$

$\Rightarrow (Ay)(e_k) = \langle e_k, Ay \rangle = \sum e_k y_k = \cancel{(Ay)_k} \, y_k$

dh $Ax = 0 \Rightarrow (x_k)_{k \in \mathbb{N}} = 0$ für $\forall k \in \mathbb{N}$. ✓

iii) Surjektiv

Sei $(Ay)=f \in c_0'$ beliebig.

- Setze $y_j := f(e_j)$ und $\alpha_j \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha_j| = 1$

$\alpha_j y_j = |y_j| \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

- Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
- Definiere $x \in c_0$ durch

$$x_j := \begin{cases} \alpha_j & \text{für } 1 \leq j \leq n. \\ 0 & \text{sonst} \ . \ j > n. \end{cases}$$

$\Rightarrow \|x\|_{c_0} = 1$ und

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) \right| = |\overset{(Ay)(x)}{f(x)}|$$

$$\leq \underbrace{\|x\|}_{=1} \|f\|$$

$\overset{n\to\infty}{\text{dh}} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| = \|y\|_{\ell^1} \leq \|f\|$

(2)

$\Rightarrow$ Für beliebige $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in c_0$ gilt $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$ weil (! $\{e_i\}$ keine Basis).

$$\left\| \sum_{j=1}^{r} x_j e_j - x \right\|_{c_0} = \left\| \sum_{j=r+1}^{\infty} x_j e_j \right\|_{c_0}$$

$$= \sup_{j > r} |x_j| \xrightarrow[r \to \infty]{} 0 .$$

weil ja $x \in c_0$.

$\Longrightarrow$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

$$= \langle x, Ay \rangle .$$

$\Rightarrow f = Ay$ $\quad$ f war beliebig $\Rightarrow$ ~~sup~~ A surjektiv.

$\Rightarrow \|y\| \leq \|Ay\| = \|f\| \leq \|y\|_{\ell_1}$ $\quad \Rightarrow$ $(\|Ay\| = \|f\|) = \|y\|_{\ell_1}$

A ist Isometrie.

$\Rightarrow \ell^1 \cong c_0^*$ $\quad$ ⊠

Bemerkung:

·) Dualraum ~~kann~~ aufgefasst ist die Menge $\forall$ Folgen $Y = Y_k$. für welche die Reihe für $\forall$ $X \in c_0$ absolut konvergiert, weil wir für festes Y immer X so wählen können dass $x_k y_k \geq 0$. $\forall k \geq 1$.

·) $f \in \ell_\infty^*$

1) Wenn $x \in c$

$x = (x_k)$ $\quad f(x) = \lim_{k \to \infty} x_k$

$\Rightarrow x - f(x) e \in c_0$ wenn $e = (1, 1 \dots)$ für $\forall x \in c$.

Man kann zeige, dass $c^* \cong \ell_1$.
$c_0^* \cong \ell_1$

$\Rightarrow c^* \cong c_0^*$

$\not\Rightarrow$ Es gilt nicht $c^* = c_0^*$ $\}$.