Bsp 1

i) Sei $x \in X$ beliebig.
Sei $\{x_n\}$ eine Folge in U mit $\lim x_k = x$

$\Rightarrow \{x_n\}$ CF in X ~~weil~~ und

$\| Sx_k - Sx_m \|_Y = \| S(x_k - x_n)\| \le \|S\| \, \|x_k - x_m\|_X$.

$\{Sx_n\}$ ist CF in Y

ii) Definiere (x) $Tx = \lim Sx_n$. Hängt nicht von x ab denn für jede Folge $z_k \in U$. mit $z_k \to x$

gilt $\| Sx_k - Sz_k \|_Y = \| S(x_k - z_k) \|_Y$
$\le \|S\| \, \| x_k - z_k \|_X \to 0$.

iii) $\Rightarrow$ $Tx = Sx$ mit $x \in U$
T ist linear also $T(\alpha x + \beta z)$
$= \alpha Tx + \beta Tz$.

iv) Sei $x \in X$, $\{x_k\} \in X$ mit $x_k \to x$.

$\Rightarrow \|Tx\|_Y = \| \lim Sx_k \|_Y = \lim \|Sx_k\|_Y$
$\le \|S\| \lim \|x_k\|_X = \|S\| \, \|x\|_X$

$\Rightarrow T$ stetig mit $\|T\| \le \|S\|$ also $\|T\| = \|S\|$

~~Wegen~~ (*) muss für ~~A~~ jede stetige Fortsetzung T von S gelten.

=> T eindeutig bestimmt.

Bsp2 a)

$l_\infty = l_1^*$

i) ~~J~~ Jedes $b \in l_\infty$ ist ein beschränktes lin. Funktional auf l_1

anhand von

$$\sum_i a_n b_n \qquad \begin{matrix} a \in l_1 \\ b \in l_\infty \end{matrix}$$

Es gilt $\quad \left|\sum a_n b_n\right| \leq \|b\|_\infty \sum |a_n| = \|b\|_\infty \|a\|_1 < \infty$.

ii) Sei $F \in l_1^*$. Sei $b_i = F(e_i)$

$\Rightarrow \quad |b_i| = |F(e_i)| \leq \|F\|. \quad \Rightarrow$ Wenn $b = \{b_i\}$ dann $b \in l_\infty$

iii) Behauptung $\quad F(\{a_n\}) = \sum a_n b_n$

Wähle $\quad a_n^{(m)} = \begin{cases} a_n & n \leq m \\ 0 & n > m. \end{cases}$

F ist linear, deswegen

$$F(a^{(m)}) = F\left(\sum_{n=1}^{m} a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{m} a_n F(e_n) = \sum_{n=1}^{m} a_n b_n$$

$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} a_n b_n < \infty \quad$, weil $a \in l_1$ und $b_n \in l_\infty$

F ist stetig auf l_1 und $a^{(m)} \to \{a_n\}$ in l_1.

$$\Rightarrow F(a^{m}) \xrightarrow[m \to \infty]{} F(\{a_n\}) \Rightarrow F \in l_\infty .$$

iii) <u>Normen gleich</u>

Wir wissen $\|b\|_{l_1^*} \leq \|b\|_\infty = \sup |b_n|$

Für ein $\varepsilon > 0$, $\exists N$ sd

$$|b_N| > \|b\|_\infty - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|b\|_{l_1^*} \geq |b(e_N)| = |b_N| > \|b\|_\infty - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|b\|_{l_1^*} \geq \|b\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|b\|_{l_1^*} = \|b\|_\infty \qquad \blacksquare$$

Bsp 2 b)

$l_\infty^* \neq l_1$

Bsp 2 a) sagt uns auch daß l_1 ein TR von l_∞^* ist

Das ist konsistent mit $l_1^{**} = l_\infty^*$. Deswegen reicht es zz, daß l_1 nicht ganz l_∞^* ist.

i) Sei c abgesch. TR von l_∞, c ist die Menge der konvergenten Folgen.

ii) Sei $\{a_n\} \in c$, definiere $f(\{a_n\}) = \lim_{n\to\infty} a_n$

f ist abgeschlossenes lin. Funktional.

Hahn Banach $\Rightarrow$ Fortsetzung von c auf l_∞

$f \to \hat{f}$

Es gilt $\hat{f} \neq 0$ und $\hat{f}_{|c_0} = 0$.

iii) Angenommen $\hat{f} \in l_1$, dann $\hat{f}(\{a_n\}) = \sum a_n b_n$ mit $\{b_n\} \in l_1$. $\hat{f}_{|c_0} = 0$, also $b_n = \hat{f}(e_n) = 0$ weil $e_n \in c_0$ $\Rightarrow \hat{f}$ ist Null Funktional.

aber $\hat{f}$ ist nicht Null Funktional auf l_1 $\not\!\!E$

Bsp 3

.) Wenn $y \in Z$, dann gilt $d = 0$ und deswegen funktioniert die ~~Gl~~ Glg für das Nullf.-Funktional

.) Wenn $y \notin Z$: Sei $Y = \mathbb{C}y + Z \subset X$

$\Rightarrow \forall x \in Y, \exists! \alpha \in \mathbb{C}$, sd $x = \alpha y + z$.

i) Definiere $\lambda(x) = \alpha d$. Es gilt $\lambda(z) = 0$ für alle $z \in Z$

und $\lambda(y) = d$.

ii) Es gilt

$\|x\| \geq |\alpha| \|y + \frac{1}{\alpha} z\| \geq \alpha d = |\lambda(x)|$

wegen der Definition von d. λ ist linear in X.

$\Rightarrow \lambda \in Y^*$, $\|\lambda\| \leq 1 \overset{\text{Hahn Banach}}{\Rightarrow}$ wir setzen λ fort

zu einem Element $\Lambda \in X^*$ mit $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$.

$\boxtimes$

Bsp 4

a) Sei $\{a_n\} \in l_\infty$ $\quad Lim\{a_1, a_2 \dots\} := x^*(a_1, a_2, \dots)$

ist Banachlimes für beschränkte Folge.

$l = Lim\{a, b, a, b \dots\} \overset{iii)}{\Longrightarrow} l = Lim\{b, a, b, a, \dots\}$

$\overset{\text{Linearität}}{\Longrightarrow} 2l = Lim\{a, b, a, b \dots\} + Lim\{b, a, b, a \dots\}.$

$= Lim\{a+b, a+b, \dots\} \; = \frac{a+b}{2}.$

(*) Denn für konvergente Reihen sind $Lim\{\dots\}$ mit üblichem limes ident. $\Rightarrow l = \frac{a+b}{2}$

$\Rightarrow Lim\{a, b, c, \dots, a, b \dots, a\} = \frac{a_1 + \dots a_n}{n}$

b) $f(0,1,0,1,\dots) + f(1,0,1,0) \overset{\text{Linearität}}{=} f(1,1,1,1\dots) \overset{(*)}{=} 1$

$\underbrace{\underbrace{f(0,1,0,1,\dots)}_{=0,5} \cdot \underbrace{f(1,0,1,0)}_{=0,5}}_{\neq 1} = f(0,0,0 \dots) = 0$

Wegen a)

$\neq 0.$ ↯

Bsp 5. Ries Bsp.

i)

a) laut Riesz ist $j(y)(x) := \langle x, y \rangle \quad \forall x,y \in H$

eine surjektive Isometrie.

Mit $x^*, y^* \in H^* \Rightarrow \exists\, x,y \in H \quad x^* = j(x)$

$y^* = j(y)$.

und $\langle x^*, y^* \rangle_{H^*}$ ist Skalarprodukt

auf H^* mit $\|x^*\|_{H^*} = \|x\|$ Operatornorm auf H^*

und H^* ist Hilbertraum.

ii) Nochmalige Anwendung von Riesz.

$x^{**} \in H^{**}$ lässt sich darstellen als

$x^{**} = j^*(x^*)$ mit $j^* : H^* \to H^{**}$

$\Rightarrow x^{**} = j^*(x^*)(y^*) = \langle y^*, x^* \rangle_{H^*}$

$= \langle x, y \rangle_H = y^*(x)$

$= i(x)(y^*)$.

$\forall y^* \in H^*$

$\Rightarrow x^{**} = i(x) \Rightarrow i$ surjektiv b). Sei $T : X \to Y$ Isomorphismus.

$i_X : X \to X^{**}$ kanonische Einbettg von X.

<u>zz $i_Y : Y \to Y^{**}$ surjektiv.</u>

∘ Sei $y^{**} \in Y^{**}$

∘ Definiere $x^{**} \in X^{**}$ durch $x^{**}(x^*) := y^{**}(x^* \circ T^{-1})$ $\forall x^* \in X^*$

∘ Für $y^* \in Y^*$ gilt dann.

$$y^{**}(y^*) = x^{**}(y^* \circ T) = (y^* \circ T)^{ca}(i_X^{-1}(x^{**}))$$

$$= y^*(\underbrace{(T \circ i_X^{-1})(x^{**})}_{=:y})$$

$$= i_Y(y)(y^*)$$

$\Rightarrow$ $y^{**} = i_Y(y)$ mit $y \in Y$ $\Rightarrow$ i_Y surjektiv.

$\#$