

## ÜBUNGSBLATT 0

### **Beispiel 1 (Lösungsformel für quadratische Gleichungen).**

Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$  gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Werte  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  so, daß die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = \alpha(x + \beta)^2 + \gamma \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt.

(b) Berechnen Sie damit alle möglichen Lösungen  $x \in \mathbb{R}$  der Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

### **Beispiel 2 (Quadratische Formen in Summe von Quadraten zerlegen).**

(a) Finden Sie Werte  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  so, daß

$$x^2 - xy + y^2 = a(x + by)^2 + d(cx + y)^2 \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

erfüllt ist, und folgern Sie daraus, daß wir

$$x^2 - xy + y^2 \geq 0 \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

haben.

(b) Finden Sie heraus, ob

$$x^2 + 2xy + 4xz + 2y^2 - 2yz + 4z^2 \geq 0 \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R}$$

gilt.

### **Beispiel 3 (Lösen von Gleichungen mit Quadratwurzeln).**

Berechnen Sie

(a) alle Lösungen  $x \in [1, \infty)$  der Gleichung

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1,$$

(b) alle Lösungen  $x \in [0, \infty)$  der Gleichung

$$\sqrt{1 + \sqrt{x}} = \sqrt[4]{2 + 2x},$$

(c) alle Lösungen  $x \in \mathbb{R}$  der Gleichung

$$\sqrt{48x^6 + 33} = 8x^3 + 1.$$

### **Beispiel 4 (Lösen von Gleichungen mit Brüchen).**

Bestimmen Sie

(a) alle Lösungen  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  der Gleichung

$$\frac{x-1}{x^2-1} = x+3,$$

(b) alle Lösungen  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$  der Gleichung

$$\frac{2x}{1+x} + \frac{2-3x^{-2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = 1,$$

(c) alle Lösungen  $x \in (0, \infty)$  der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}} = 1 + \sqrt{1+x}.$$

**Beispiel 5 (Lösen von linearen Gleichungssystemen).**

Seien Koeffizienten  $a, b, c, d, A, B \in \mathbb{R}$  gegeben. Berechnen Sie alle Lösungen  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} ax + by &= A, \\ cx + dy &= B. \end{aligned}$$

Welche Bedingung müssen Sie an die Koeffizienten stellen, damit Sie eine eindeutige Lösung bekommen?

**Beispiel 6 (Lösen von quadratischen Gleichungssystemen).**

Bestimmen Sie alle Lösungen  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ (x-1)^2 + 2y^2 &= 1. \end{aligned}$$