Übungsblatt 2B

Beispiel 1 (Exponentielle Funktionen).

Wir definieren für alle $x \in (0, \infty)$ und allgemeine Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x^\alpha := \exp(\alpha \ln(x)).$$

(a) Zeigen Sie, daß

$$\ln(x^\alpha y^\beta) = \alpha \ln(x) + \beta \ln(y) \text{ für alle } x, y \in (0, \infty) \text{ und } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

gilt.

(b) Verifizieren Sie, daß mit dieser Definition für alle $x \in (0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \text{ und } x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$$

gilt.

Beispiel 2 (Stückweise invertierbare Funktionen).

Zerlegen Sie $\mathbb{R}$ in vier Intervalle I_1, I_2, I_3 und I_4 mit $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 = \mathbb{R}$, für die die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := |(x-2)^2 - 4|,$$

streng monoton auf jedem Intervall I_j ist, und berechnen Sie die inversen Abbildungen der auf diese Intervalle eingeschränkten Funktionen $f|_{I_j}\colon I_j \to f(I_j)$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Beispiel 3 (Inverse Funktion in zwei Variablen).

Sei

$$f\colon \mathbb{R} \times [0, \infty) \to (-\infty, 0] \times \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) := (-\sqrt{x_2}, x_1^3 + x_2).$$

Zeigen Sie, daß f bijektiv ist, und berechnen Sie die inverse Funktion von f.

Beispiel 4 (Linksinverse einer Funktion).

Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f\colon X \to Y$ zwischen zwei Mengen X und Y, für die es eine Funktion $g\colon Y \to X$ mit

$$g(f(x)) = x \text{ für alle } x \in X$$

gibt und zumindest ein $y \in Y$ mit $f(g(y)) \neq y$ existiert.

Kann man ein solches Beispiel auch finden, wenn man zusätzlich $X = Y$ verlangt?

Beispiel 5 (Bijektive Abbildungen).

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen, X eine Menge mit m Elementen und Y eine Menge mit n Elementen. Wie viele verschiedene bijektive Abbildungen $f\colon X \to Y$ gibt es?

Beispiel 6 (Physikalische Größen als Funktion unterschiedlicher Parameter).

Wir betrachten ein Federpendel mit Masse $m > 0$ und Federkonstante $k > 0$ und bezeichnen mit

$$x_{\mathrm{t}}\colon [0, \infty) \to [-A, A],\ x_{\mathrm{t}}(t) := A\cos(\omega t),$$

für gegebene Anfangsauslenkung $A > 0$ und $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ die Auslenkung des Pendels aus der Gleichgewichtslage als Funktion der Zeit. Die kinetische Energie des Pendels in Abhängigkeit von der Auslenkung ist gegeben durch

$$E_{\mathrm{x}}\colon [-A, A] \to [0, \tfrac{k}{2}A^2],\ E_{\mathrm{x}}(x) := \frac{k}{2}(A^2 - x^2).$$

(a) Bestimmen Sie die kinetische Energie

$$E_{\mathrm{t}} \coloneqq E_{\mathrm{x}} \circ x_{\mathrm{t}} \colon [0,\infty) \to [0, \tfrac{k}{2}A^2]$$

als Funktion der Zeit. Zu welchen Zeiten ist die kinetische Energie am größten?

(b) Berechnen Sie umgekehrt den Absolutwert $x_{\mathrm{E}} \colon [0, \frac{k}{2}A^2] \to [0, A]$ der Auslenkung als Funktion der kinetischer Energie:

$$x_{\mathrm{E}} \coloneqq (E_{\mathrm{x}}|_{[0,A]})^{-1};$$

sowie den Zeitpunkt $t_{\mathrm{E}} \colon [0, \frac{k}{2}A^2] \to [0, \frac{\pi}{2\omega}]$, wo diese Auslenkung erstmals stattfindet, als Funktion der kinetischen Energie:

$$t_{\mathrm{E}} \coloneqq (x_{\mathrm{t}}|_{[0,\frac{\pi}{2\omega}]})^{-1} \circ x_{\mathrm{E}}.$$

(c) Verifizieren Sie explizit, daß $E_{\mathrm{t}} \circ t_{\mathrm{E}} = \mathrm{id}_{[0,\frac{k}{2}A^2]}$ gilt.